

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 함수 f 의 연속성을 판정하시오.
- (b) (5점) $D_1f(0, 0)$ 과 $D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (c) (5점) 원점에서 함수 f 의 미분가능성을 판단하시오.

문제 2. [10점] 좌표공간에서 정의된 함수

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) f 의 0-등위면이 점 $P(1, -1, -1)$ 근방에서 어떤 일급함수

$$z = g(x, y)$$

의 그래프로 나타남을 증명하시오.

- (b) (5점) $\text{grad } g(1, -1)$ 을 구하시오.

문제 3. [20점] 점 $P(-3, 0, 0)$ 에 이르는 거리에서 점 $Q(3, 0, 0)$ 에 이르는 거리를 뺀 값이 4인 점들로 이루어진 곡면 S 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡면 S 위의 점 $R\left(3, 0, \frac{5}{2}\right)$ 에서의 접평면의 방정식을 구하시오.
- (b) (10점) 점 P 에서 점 R 로 쏜 빛이 S 에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를 구하시오.

문제 4. [10점] 좌표평면에서 정의된 함수 $f(x, y) = e^{x^2y}$ 에 대하여, $D_{\mathbf{v}}f(1, 0)$ 가 최소가 되도록 하는 단위벡터를 \mathbf{v} 라 하자. 이때, $D_{\mathbf{v}}^2f(1, 0)$ 를 구하시오.

문제 5. [10점] 이급함수 $f(x, y)$ 의 원점에서의 2차 근사다항식이 $T_2f(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ 일 때, 헤세 행렬 $f''(0, 0)$ 을 구하시오.

문제 6. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = x - 2y + \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

의 임계점을 모두 구하고, 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

문제 7. [20점] 좌표공간의 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 위에서 정의된 함수

$$f(x, y, z) = \sqrt{3}x(y + z) - yz$$

의 최솟값과 최댓값을 구하시오.

문제 8. [15점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 두 일급함수 $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 역함수 관계에 있다고 하자. 이때 공간 상의 임의의 점 P 에 대해 $\det F'_1(P)$ 가 0이 아님을 보이시오.
- (b) (5점) 두 함수 $G(x, y) = (x^3 + y^3, xy)$ 와 $H(u, v) = (e^u, \cos v)$ 에 대하여 $\det(G \circ H)'(0, \frac{\pi}{2})$ 를 구하시오.
- (c) (5점) (b)의 함수 $G(x, y)$ 와 점 $P(3, 1)$ 에 대하여 다음 값을 구하시오.

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\text{Vol}(G(\mathbb{B}_r(P)))}{\text{Vol}(\mathbb{B}_r(P))}$$

단, $\mathbb{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |X - P| \leq r\}$ 이다.

문제 9. [20점] 좌표평면 위의 극좌표계 식

$$r = 1 + \cos \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right)$$

로 주어진 곡선 X 에 대하여, 다음 벡터장의 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (단, 곡선의 향은 반시계방향으로 주어진다.)

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y, x - 1)}{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \frac{(y - \frac{1}{2}, -x + \frac{3}{2})}{x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{5}{2}}$$

문제 10. [15점] 곡선

$$X(t) = \left(2 \cos t, 4 \sin t, \frac{t}{\pi}\right) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

에 대하여, 두 점 $P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0)$ 을 제외한 좌표공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(X) = \frac{X - P}{|X - P|^2} - \frac{X - Q}{|X - Q|^2}$$

의 선적분 $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 을 구하시오.