

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 함수  $f$ 의 연속성을 판정하시오.
- (b) (5점)  $D_1f(0, 0)$ 과  $D_2f(0, 0)$ 을 구하시오.
- (c) (5점) 원점에서 함수  $f$ 의 미분가능성을 판단하시오.

문제 2. [10점] 좌표공간의 포물면  $x^2 + y^2 + z = 1$  위의 점  $P$ 에서의 접평면이 평면  $2x + y - 3z = 2$ 와 평행하다고 한다. 점  $P = (a, b, c)$ 를 모두 구하시오.

문제 3. [20점] 좌표공간에서 정의된 함수

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$$

에 대하여 곡면  $S$ 가 방정식  $f(x, y, z) = 3$ 으로 주어져 있다. 공간 상의 한 점에서 점  $P = (1, 2, -3)$ 를 향하여 단위벡터  $\mathbf{v}$  방향으로 발사된 빛이  $S$ 에 반사되어 나가는 방향의 단위벡터를  $\mathbf{v}^*$ 라 하자. 벡터  $\mathbf{v}$ 와 벡터  $\mathbf{v}^*$ 가 이루는 각이  $\frac{\pi}{3}$ 일 때,

$$D_{\mathbf{v}^*}f(P) - D_{\mathbf{v}}f(P)$$

의 값을 구하시오. 단,  $D_{\mathbf{v}}f(P) < 0$ 을 만족한다.

문제 4. [10점] 좌표평면에서 정의된 함수  $f(x, y) = e^{x^2y}$ 에 대하여,  $D_{\mathbf{v}}f(1, 0)$ 가 최소가 되도록 하는 단위벡터를  $\mathbf{v}$ 라 하자. 이때,  $D_{\mathbf{v}}^2f(1, 0)$ 를 구하시오.

문제 5. [10점] 이급함수  $f(x, y)$ 의 원점에서의 2차 근사다항식이  $T_2f(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ 일 때, 헤세 행렬  $f''(0, 0)$ 을 구하시오.

문제 6. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = x - 2y + \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (0, 0))$$

의 임계점을 모두 구하고, 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

문제 7. [20점] 좌표공간의 구면  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  위에서 정의된 함수

$$f(x, y, z) = \sqrt{3}x(y + z) - yz$$

의 최솟값과 최댓값을 구하시오.

문제 8. [15점] 좌표평면에서 정의된 일급함수  $f$ 가 두 벡터  $\mathbf{v} = (-2, 1)$ ,  $\mathbf{w} = (3, -2)$ 와 한 점  $P$ 에 대하여

$$f(P) = -2, D_{\mathbf{v}}f(P) = 2, D_{\mathbf{w}}f(P) = 5$$

를 만족한다. 이때, 점  $P$ 에서 함수

$$F(x, y) = (f(x, y), (f(x, y))^2)$$

의 야코비 행렬을 구하시오.

문제 9. [20점] 좌표평면 위의 극좌표계 식

$$r = 1 + \cos \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right)$$

로 주어진 곡선  $X$ 에 대하여, 다음 벡터장의 선적분  $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오. (단, 곡선의 향은 반시계방향으로 주어진다.)

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y, x-1)}{x^2 + y^2 - 2x + 1} + \frac{(y - \frac{1}{2}, -x + \frac{3}{2})}{x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{5}{2}}$$

문제 10. [15점] 곡선

$$X(t) = \left( (\sin t)(\log t), e^t, \frac{t}{2} \right) \quad \left( \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2} \right)$$

에 대하여, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left( e^x \log y, \frac{e^x}{y} - \cos z, y \sin z \right) \quad (y > 0)$$

의 선적분  $\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  을 구하시오.