

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [10점] 공간의 세 점 $A = (2, 2, 0)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (2, 0, 1)$ 의 중심을 P 라고 할 때, $\tan \angle APO$ 의 값을 구하시오. (단 O 는 원점)

문제 2. [20점] 두 평면 $3x - 4y + 2z = 1$ 과 $3x + y + 2z = 6$ 가 주어졌다고 하자.

- (a) (5점) 두 평면 이루는 각을 구하시오.
- (b) (5점) 두 평면의 교선 ℓ 의 방정식을 구하시오.
- (c) (10점) 교선 ℓ 위의 점들 중에서 점 $Q = (0, 1, 0)$ 에 가장 가까운 점의 좌표를 구하시오.

문제 3. [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 임의의 양수 y_1, y_2, \dots, y_n 에 대하여, CBS 부등식을 이용하여, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n} \leq \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n}$$

- (b) (10점) 세 양수 x, y, z 가 $x + y + z = 3$ 일 때,

$$f(x, y, z) = \frac{yz + 4zx + 9xy}{xyz}$$

가 최소를 가지는 점 (x, y, z) 와 최소값을 구하시오.

문제 4. [20점] 점 $P \in \mathbb{R}^4$ 에 대하여 초평면 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$ 에 대한 대칭점을 $L(P)$ 라 하자.

- (a) (15점) $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ 일 때, $L(P)$ 를 P 로 표현하시오.
- (b) (5점) 선형사상 L 에 대응되는 행렬 A 를 구하시오.

문제 5. [20점] 2022×2022 행렬 $A = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{2022})$ 가 $\det A = -1$

을 만족한다. 각각의 자연수 $k \in \{1, \dots, 2022\}$ 에 대해 A 의 k 번째 열을

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 - 4\mathbf{a}_4 + \dots - 2022\mathbf{a}_{2022}$$

로 바꾼 행렬을 B_k 라 할 때,

$$\det B_1 + \det B_2 + \dots + \det B_{2022}$$

를 구하시오. (예를들어, $B_1 = (\mathbf{b} \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{2022})$ 이다.)

문제 6. [20점] 공간상의 곡선

$$X(t) = (2 \cos t, t, 1 + 2 \sin t)$$

에 대하여, 점 $X(0)$ 에서 접촉평면 Π 의 식을 구하고, 점 $Q = (1, 3, 2)$ 에서 평면 Π 까지의 거리를 구하시오.

문제 7. [20점] 극좌표계로 주어진 두 곡선

$$r^2 = 8 \cos 2\theta, \quad r = 2$$

에 대해, 첫 번째 곡선의 내부와 두 번째 곡선의 외부에 놓인 영역의 넓이를 구하시오.

문제 8. [20점] 극좌표로 주어진 두 곡선

$$r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 + \sin \theta$$

에 의해 둘러싸인 영역 중 $(1, 1)$ 을 포함하는 영역을 R 이라 할 때, R 의 둘레의 길이를 구하시오.

문제 9. [25점] 곡선

$$X(t) = (2 \cos t - \cos(2t), 2 \sin t - \sin(2t)) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) X 를 호의 길이로 재매개화 하시오.
- (b) (15점) 밀도함수 $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ 에 대하여 X 의 질량을 구하시오.

문제 10. [25점] 곡선 $y = x \log x - x$ 위의 점 $P = (1, -1)$ 에서 곡선의 곡률벡터와 곡률, 그리고 접촉원의 방정식을 모두 구하시오.