# 수학 2 중간고사

(2022년 7월 9일 오후 1:00–3:00)

| 학번: | 이름: |
|---|---|

**모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)**

**문제 1.** [20점] 다음과 같이 정의된 함수 $f$에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin^2 x + x\sin^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) (5점) 함수 $f$가 연속인 점을 모두 구하시오.

(b) (5점) $D_1 f(0,0)$와 $D_2 f(0,0)$를 구하시오.

(c) (10점) 원점에서 $f$의 미분가능성을 판단하시오.

**문제 2.** [15점] 다음 함수의 임계점을 모두 구하고, 각 임계점을 극대점, 극소점과 안장점으로 분류하시오.

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$$

**문제 3.** [20점] 공간상의 점$(x,y,z)$에서 온도 $T$는 다음과 같은 함수로 주어진다.

$$T(x,y,z) = 100e^{-x^2-xy-z^3+2}$$

(a) (10점) $(1,0,1)$에서 $\mathbf{v} = (1,1,1)$ 방향으로의 온도 변화율을 구하시오.

(b) (10점) $(1,0,1)$에서 온도가 가장 빠르게 증가하는 방향을 구하고, 그 때의 온도변화율을 구하시오.

**문제 4.** [15점] 함수 $f(x,y) = \cos x \sin(x+y)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) 원점에서 함수 $f$의 3차 근사다항식을 구하시오.

(b) (10점) (a)의 결과를 이용하여 $\cos 0.02 \sin 0.01$의 3차 근삿값을 구하고, 오차가 $6 \times 10^{-7}$ 이하임을 보이시오.

⟨ 연습용 여백 ⟩

**문제 5.** [15점] 점 $(0,0,1)$ 에서 곡면 $z = 2x^2 + 3y^2$ 에 이르는 최단거리를 라그랑주 승수법을 사용하여 구하시오.

**문제 6.** [15점] 벡터함수 $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 와 $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 가 다음과 같이 주어질때 $\mathbf{H} = \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ 에 대하여 $\mathbf{H}'(1,0)$ 를 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y) = (xe^y, x^2e^{-y}, \sin(xy))$$
$$\mathbf{G}(u,v,w) = (uv^4, 2u^3w + 3w^2)$$

**문제 7.** [20점] 삼차원 공간에서 정의된 벡터장

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) = \big(&y\cos(x+z) + z\cosh x,\\ &\sin(x+z) + \sinh y,\\ &y\cos(x+z) + \sinh x\big)\end{aligned}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\mathbf{F}$ 의 잠재함수가 존재하면 모두 구하시오.

(b) (10점) 곡선 $\mathbf{X}$ 가 다음과 같이 주어질 때 선적분 $\int_{\mathbf{X}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 를 구하시오.

$$\mathbf{X}(t) = (1 - \cos t, t - \sin t, t) \quad 0 \le t \le 2\pi$$

**문제 8.** [15점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{\mathbf{X}} (x + 2y)dx + x^2 dy$$

이때, $\mathbf{X}$ 는 점 $(2,0)$ 에서 점 $(0,2)$ 까지의 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 짧은 호와 점 $(0,2)$ 에서 점 $(4,3)$ 까지의 선분으로 구성된다.

**문제 9.** [15점] 공간에서 곡선

$$C : \mathbf{X}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \cos \pi t, t - \sin \pi t\right) \quad (0 \le t \le 1)$$

을 따라 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - yz\right)\mathbf{j} + 2y^2\mathbf{k}$$

가 한 일을 구하시오.