

수학 1 중간고사
(2022년 7월 8일 오후 6:00-8:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [10점] 각각의 자연수 n 에 대하여 $x = \frac{1}{n^2}$ 에서 곡선 $y = \sin \sqrt{x}$ 의 접선의 x 절편을 a_n 이라 하자. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 수렴·발산을 판정하시오.

문제 2. [15점] 다음 급수의 수렴·발산을 판정하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n}}$

(b) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)!}$

(c) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

문제 3. [20점] 다음 거듭제곱급수가 수렴하는 x 의 범위를 구하시오.

(a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} x^{2n}$

(b) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n \log(n^2+1)}$

문제 4. [15점] 수열 (a_n) 이 점화식

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

을 만족할 때, 거듭제곱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a_n}$ 의 수렴반경을 구하시오.

문제 5. [15점] 다음 무한급수의 합을 구하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$

(b) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

(c) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$

문제 6. [15점] 열린 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

에 대하여

(a) (10점) 역함수 $g(y)$ 가 존재하고 미분가능함을 보이시오.

(b) (5점) 미분계수 $g'(0)$ 과 $g''(0)$ 을 구하시오.

문제 7. [15점] $\int_0^{0.1} \log(1+3x^3) dx$ 의 근삿값을 오차의 범위가 10^{-6} 이하가 되도록 구하시오.

문제 8. [15점] $\lim_{x \rightarrow 0+} (1-x)^{\log x}$ 의 값을 구하시오.

문제 9. [15점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) $f(x) = o(x^n)$ 이고 $g(x) = o(x^n)$ 일 때 $f(x) - g(x) = o(x^n)$ 임을 보이시오.

(b) (10점) $\sin^{-1} x - \sinh^{-1} x$ 의 10 차 근사다항식을 구하시오.

문제 10. [15점] 극좌표계로 $r = \frac{1}{\sec \theta - \cos \theta}$ 로 주어지고 원점을 포함하는 곡선과 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 로 주어지는 직선에 의해 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.