

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [10점] 삼차원 공간의 $\mathbf{0}$ 이 아닌 세 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 서로 직교할 때, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 일차독립임을 보이시오.

문제 2. [15점] 삼차원 공간의 평면 $x + 2y + 3z = 0$ 과 직선 $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = z+2$ 가 만나는 교점 P 의 좌표를 구하고, 이 직선을 따라 입사하여 점 P 에서 반사된 빛이 꺾인 각도 θ 에 대해 (단, θ 는 예각) $\sin \theta$ 의 값을 구하시오.

문제 3. [20점] 삼차원 공간의 세 벡터 $\mathbf{a} = (1, 1, -1), \mathbf{b} = (1, -2, 1), \mathbf{c} = (1, 1, 1)$ 에 대해, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ 가 일차종속인 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 중에서 $|\mathbf{x} - \mathbf{c}|$ 가 최소가 되도록 하는 \mathbf{x} 를 구하시오.

문제 4. [15점] 다음을 만족하는 3×3 행렬 A 의 행렬식을 구하시오.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

문제 5. [30점] 삼차원 공간의 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) 등식

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

이 성립함을 보이시오.

(b) (15점) 삼차원 공간에서 정의된 선형사상

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

에 대응하는 행렬을 $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 라 하자. \mathbf{a} 와 \mathbf{b} 를 열벡터로 표현하였을 때

$$\mathbf{ab}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

를 만족한다고 하자. 이 때, $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 를 구하시오.

문제 6. [15점] 삼차원 공간의 곡선 $X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t^2)$ 위의 점 $(1, 0, 0)$ 에서 접선의 방정식 및 접촉평면의 방정식을 구하시오.

문제 7. [15점] 극좌표계에서 다음 식으로 주어진 영역의 넓이를 구하시오.

$$1 - \sin \theta \leq r \leq \sqrt{1 - \sin \theta}$$

문제 8. [30점] 삼차원 공간에서 포물면 $y = x^2$ 과 쌍곡포물면 $3z = 2xy$ 의 교선의 일부로 원점에서 점 $(1, 1, \frac{2}{3})$ 까지를 곡선 X 라 하자. 곡선 X 위의 점 (x, y, z) 에서 밀도함수가 $\rho(x, y, z) = y^2 + 3xz$ 로 주어졌을 때, 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡선 X 의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) 곡선 X 의 질량을 구하시오.
- (c) (10점) 곡선 X 의 질량중심의 x 좌표를 구하시오.

문제 9. [30점] 좌표평면에서의 곡선 $y = x^2$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡선을 매개화하고 점 $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 에서의 곡률을 구하시오.
- (b) (10점) 점 P 에서의 접촉원의 반지름의 길이와 중심을 구하시오.
- (c) (10점) 위의 접촉원을 단위 속력을 가지는 곡선으로 매개화하여 표현하시오.

문제 10. [20점] 실수체의 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 다섯 개의 함수

$$1, \cos x, \cos 2x, \sin x, \sin 2x$$

의 일차결합으로 표현되는 함수들의 집합은 벡터공간이 된다. 이 공간의 차원을 구하시오.