

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

**문제 1.** [20점] 삼차원 공간의 두 점  $P = (1, 1, 1)$ 과  $Q = (1, 0, 0)$ 이 주어져 있고, 점  $R$ 이 직선  $x = \frac{y}{2} = z$  위의 점이라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 각  $QPR$ 이 직각이 되는 점  $R$ 을 구하시오.  
(b) (10점) 삼각형  $PQR$ 의 넓이가 최소가 되는 점  $R$ 을 구하시오.

**문제 2.** [25점] 등장변환  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 을 만족한다고 하자. 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 세 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 일차독립이면 세 벡터  $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)$ 도 일차독립임을 증명하시오.  
(b) (15점) 세 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 가 서로 직교하면 세 벡터  $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)$ 도 서로 직교함을 증명하시오.

**문제 3.** [20점] 크기가  $3 \times 3$  행렬  $A$ 가 다음을 만족한다고 하자.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 행렬  $A$ 의 행렬식  $\det(A)$ 를 구하시오.  
(b) (10점) 세 열벡터  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ 가 주어졌을 때, 세 벡터  $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_3$ 로 생성되는 평행육면체의 부피를 구하시오.

**문제 4.** [25점] 삼차원 공간의 세 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 등식

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

이 성립함을 보이시오.

- (b) (15점) 삼차원 공간에서 정의된 선형사상

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

에 대응하는 행렬을  $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 라 하자.  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 를 열벡터로 표현하였을 때

$$\mathbf{ab}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

를 만족한다고 하자. 이 때,  $A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 를 구하시오.

**문제 5.** [20점] 삼차원 공간의 곡선  $X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, t^2)$  위의 점  $(1, 0, 0)$ 에서 접선의 방정식 및 접촉평면의 방정식을 구하시오.

**문제 6.** [15점] 극좌표계에서 다음 식으로 주어진 영역의 넓이를 구하시오.

$$1 - \sin \theta \leq r \leq \sqrt{1 - \sin \theta}$$

**문제 7.** [30점] 극좌표계에서

$$r = e^{-\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

로 표현된 곡선  $X$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 곡선  $X$  위의 각 점에서 위치벡터와 접선벡터가 이루는 예각이 일정함을 증명하고 그 각을 구하시오.
- (b) (10점) 곡선  $X$ 의 길이를 구하시오.
- (c) (10점) 곡선  $X$ 를 호의 길이로 재매개화하시오.

**문제 8.** [25점] 삼차원 공간에서 포물면  $y = x^2$ 과 쌍곡포물면  $3z = 2xy$ 의 교선의 일부로 원점에서 점  $\left(1, 1, \frac{2}{3}\right)$ 까지를 곡선  $X$ 라 하자. 곡선  $X$  위의 점  $(x, y, z)$ 에서 밀도함수가  $\rho(x, y, z) = y^2 + 3xz$ 로 주어졌을 때, 다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) 곡선  $X$ 의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) 곡선  $X$ 의 질량을 구하시오.
- (c) (10점) 곡선  $X$ 의 질량중심의  $x$ 좌표를 구하시오.

**문제 9.** [20점] 좌표평면에서 식  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 으로 주어진 타원과 이 타원 위의 점  $P = (2, 0)$ 에 대해 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 점  $P$ 에서 타원의 곡률벡터와 곡률을 구하시오.
- (b) (10점) 점  $P$ 에서 타원에 대한 접촉원의 방정식을 구하시오.