

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

〈 풀이 〉

문제 1. [10점] 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

(a) (5점)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n^2+2)(n^2-4)}{(n^2+1)(n^2-2)n}$

(b) (5점)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$

문제 2. [10점] 다음 거듭제곱급수가 수렴하는  $x$ 의 범위를 구하시오.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^{10}}$$

문제 3. [15점] 모든 실수  $x$ 에 대하여 정의된 두 번 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수에  $x$ 에 대하여  $f'(x) \neq 0$ 를 만족한다. 원점에서  $f$ 의 2차 근사다항식이  $3 + 8x + \frac{1}{2}x^2$ 일 때,  $f(x)$ 의 역함수  $g(y)$ 에 대하여  $y = 3$ 에서  $g(y)$ 의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 4. [15점] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x \log x} - \frac{1}{x^x - 1} \right)$$

문제 5. [15점] 원점에서 함수  $f(x) = e^x \cos x$ 의 3차 근사다항식을 구하고, 3차 테일러 나머지항  $R_3 f(x)$ 에 대하여  $|R_3 f(1)| \leq \frac{\sqrt{2}}{12} e^{\frac{\pi}{4}}$ 가 성립함을 보이시오.

문제 6. [15점]  $\cosh x$ 에 대해 테일러 정리를 이용하여 다음 정적분 값을 오차가  $10^{-3}$  이하가 되도록 구하시오. (단, 근삿값은 유리수로 구하시오.)

$$\int_0^1 \frac{\cosh x - 1}{x^2} dx$$

문제 7. [15점] 삼차원 좌표공간에서 직교좌표계  $(x, y, z)$ 로 나타낸 다음 두 영역

$$A : z \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}, \quad B : z \leq 1$$

에 대하여,  $A$ 를 구면좌표계  $(\rho, \varphi, \theta)$ 로 표현하고  $A$ 와  $B$ 가 겹치는 부분의 부피를 구하시오.

문제 8. [15점] 자연수  $n$ 에 대하여, 좌표평면에서 극좌표계로 표현된 곡선  $r = \sin(n\theta)$ 의 그래프가 가지는 잎의 개수를  $a_n$ 이라고 하자. 이때 다음 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$$

문제 9. [15점] 자연수  $n$ 에 대하여, 삼차원 좌표공간에서 구면좌표계  $(\rho, \varphi, \theta)$ 로 나타낸 곡선

$$\{(\rho, \varphi, \theta) \mid \varphi = \arcsin(1/n), \quad \rho = 1\}$$

의 길이를  $l_n$ 이라 할 때, 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n}{2^n}$ 의 합을 구하시오.

문제 10. [10점] 다음 집합의  $\max, \min, \sup, \inf$  중 존재하는 것의 값을 모두 구하시오. (단, 값이 존재하지 않는 경우 존재하지 않음이라고 적을 것.)

(a) (5점)  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

(b) (5점)  $B = \left\{ n^{\frac{1}{n}} \mid n = 3, 4, 5, \dots \right\}$

문제 11. [15점] 다음 미분방정식

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

을 만족하는 함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 거듭제곱급수를 이용하여 구하여 초등함수로 표현하시오. (여기서 초등함수란, 다항함수나 유리함수, 지수함수나 로그함수, 삼각함수나 역삼각함수, 또는 이들의 합과 곱, 합성이나 역함수 등으로 표현되는 함수를 뜻한다.)