미적분학 2 기말고사

(2021년 12월 11일 12:00–15:00)

학번:	이름:

단답형 문제를 제외한 모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 300 점)

〈 풀이 〉

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) f는 원점에서 연속인지 판정하시오.

(b) (5점) $\operatorname{grad} f(0,0)$을 구하시오.

(c) (5점) f는 원점에서 미분가능한지 판정하시오.

문제 2. [10점] $f(x,y)=\sinh x\cos y$에 대해 물음에 답하시오.

(a) (5점) **[단답형]** 원점에서 $f(x,y)$의 3차 근사다항식을 구하시오.

(b) (5점) 다음 극한값이 존재하는지 판정하고, 그 이유를 설명하시오.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-x}{x^2+y^2}$$

문제 3. [15점] **[단답형]** 함수 $f(x,y)=x^3-2x^2+xy^2$ 의 임계점을 모두 구하고, 예시를 참고하여 각 임계점을 극대점, 극소점, 안장점으로 분류하시오.

예시 : $\boxed{\text{임계점 : }(a,b)\text{ 분류 : 안장점}}$

문제 4. [15점] 점 $(0,0,1)$ 에서 다음 곡면까지의 거리를 구하시오.

$$z=x^2y-\frac{1}{4}$$

문제 5. [15점] 좌표평면에서 정의된 이급함수 $f(x,y)$가 벡터 $\mathbf{v}=(1,1)$에 대하여 다음을 만족한다.

$$D_{\mathbf{v}}f(2,1)=a,\quad D_{\mathbf{v}}{}^2f(2,1)=b\quad(a,b\in\mathbb{R})$$

이때, $g(x,y)=(x^2-y^2)f(x,y)$의 이계 편미분계수 $D_{\mathbf{v}}{}^2g(2,1)$을 a와 b에 대해 나타내시오.

문제 6. [20점] 곡선

$$X(t)=(2+\cos(3t),\,4,\,1+\sin(3t)),\quad(0\le t\le\pi)$$

에 대하여 선적분 $\displaystyle\int_X\frac{yz}{x^2+z^2}dx-\frac{xz}{x^2+z^2}dy-\frac{xy}{x^2+z^2}dz$를 구하시오.

문제 7. [20점] 표준좌표계 (u,v,x,y)로 나타낸 공간 $\mathbb{R}^4$에서 정의된 음함수

$$xu+yvu^2=2$$
$$xu^3+y^2v^4=2$$

와 점 $P(1,1,1,1)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (12점) 위의 두 방정식을 모두 만족하는 점들의 집합이 점 P 근방에서 일급함수 $(u,v)=F(x,y)$의 그래프로 나타난다는 것을 증명하시오.

(b) (8점) (a)로부터 점 P 근방에서 u와 v는 각각 (x,y)에 대한 함수이다. 이때, 점 P에서 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$와 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$를 각각 구하시오.

문제 8. [20점] 좌표평면의 점 $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$, (π,π)를 꼭짓점으로 가지는 사각형 영역 R에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_R\sin\frac{\pi(x-y)}{x+y}\,dxdy$$

문제 9. [20점] 삼차원 좌표공간에서 두 곡면 $x^2+y^2-z+1=0$과 $x^2+y^2-z^2+6z-9=0$ $(z \le 3)$으로 둘러싸인 영역의 중심을 구하시오.

문제 10. [20점] 삼차원 좌표공간에서 식

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2, \quad z \ge 0$$

으로 주어진 반공을 S라 하자. S의 경계면 $T=\partial S$의 질량이 M일 때, z축에 대한 T의 관성모멘트를 구하시오. (단, T의 밀도는 균일하다.)

문제 11. [20점] 좌표평면에서 극좌표계로 주어진 곡선

$$r = 1+\cos\theta, \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

를 C라 할 때, 다음 적분을 구하시오.

$$\int_C (x+e^x \sin y)dx + (x+e^x\cos y)dy$$

문제 12. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 곡면

$$z = 1-x^2-y^2, \quad (z \ge 0)$$

을 S라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 곡면 S의 넓이 $\mathrm{Area}(S)$를 구하시오.

(b) (10점) 곡면 S의 중심을 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$라 할 때, $\bar{z}\,\mathrm{Area}(S)$를 구하시오.

문제 13. [25점] 좌표평면의 영역 U에서 정의된 일급함수 $z=f(x,y)$에 대하여, f의 그래프로 주어진 삼차원 좌표공간의 곡면

$$z=f(x,y), \quad (x,y)\in U$$

을 S라 할 때, 다음 물음에 답하시오. 단, 곡면 S의 향은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$을 만족하도록 정하며, 곡면 S는 점 $(0,0,0)$을 포함하지 않는다.

(a) (15점) 다음 면적분을 U에서의 적분으로 표현하시오.

$$\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

단, $\mathbf{A}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$는 원점을 제외한 삼차원 좌표공간에서 정의된 입체각 벡터장이다.

(b) (10점) 좌표평면의 영역 $x^2+y^2\le 4$를 D라 할 때, (a)를 이용하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_D \frac{x^2+y^2+4}{\left(x^2+y^2+(4-x^2-y^2)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dxdy$$

문제 14. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = e^z\sin y\,\mathbf{i} + \sqrt{x^8+2}\cos z\,\mathbf{j} + (x^2+y^2+3)\mathbf{k}$$

와 곡면

$$S: z=(1-x^2-y^2)e^{1-x^2-3y^2}, \quad (z\ge 0)$$

에 대하여, $\mathbf{F}$가 곡면 S를 빠져나가는 양(flux)를 구하시오. 단, S를 빠져나가는 방향은 $\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}\ge 0$을 만족하도록 정한다.

문제 15. [20점] 삼차원 좌표공간에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r>0$인 구면 $\mathbb{S}$와, 원점에서의 거리가 $\rho(\neq r)$인 한 점 P가 주어져 있다. P가 빠진 좌표공간에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{A}_P(X) := \frac{X-P}{|X-P|^3}$$

에 대하여, 벡터값을 가지는 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_{\mathbb{S}} \mathbf{A}_P \ \mathrm{dS}$$

문제 16. [25점] 곡선

$$C(t) = (\cos t,\, \sin t,\, \sin(2t)), \quad (0\le t\le 2\pi)$$

에 대하여 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C (e^x+y^3)dx + (\cos y+z^2)dy + (x+\sin z)dz$$