

## 미적분학 1 기말고사 시험지

시험일정: 2021년 6월 5일 (토) 13:10 – 14:40(90분)

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점: 200점)

**문제 1.** [25점] 삼차원 공간에서 크기가 각각  $\sqrt{3}, \sqrt{2}$ 인 벡터  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 가 서로 수직이고  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 라고 하자. 이때, 다음을 만족하는 선형사상  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대응하는 행렬의 행렬식을 구하시오.

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

문제 2. [20점] 삼차원 공간의 부분집합  $C$ 는 행렬

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x - y - z & 2x & 2x \\ 0 & 2y & y - z - x & 2y \\ 0 & 2z & 2z & z - x - y \end{pmatrix}$$

가 역행렬을 갖지 않는  $(x, y, z)$ 들의 집합이다.  $C$ 를 구하시오.

**문제 3.** [25점] 삼차원 공간의 곡선

$$X(t) = (e^t \cos t, 1, e^t \sin t)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점)  $X(t)$ 의  $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 접선  $\ell$ 의 방정식을 구하시오.
- (b) (15점) 점  $P = (0, 0, 1)$ 을 지나고 벡터  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ 과 나란한 직선  $\ell_1$ 과 (a)에서 구한  $\ell$  사이의 거리를 구하시오.

문제 4. [35점] 극좌표계에서

$$r(\theta) = 1 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

로 표현된 곡선  $X(\theta)$ 에 대해 다음 물음에 답하십시오.

- (a) (10점)  $X(\theta)$ 를  $X(0)$ 에서부터 켄 호의 길이로 매개화하십시오.
- (b) (15점) 위 곡선의  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서의 곡률을 구하십시오.
- (c) (10점) 위 곡선과  $x$ 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하십시오.

문제 5. [20점] 좌표평면의 곡선

$$X(t) = (t, t^2) \quad (0 \leq t \leq \sqrt{2})$$

의 밀도함수가  $\mu(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$  일 때, 곡선의 질량  $m$ 과 질량중심의  $x$ 성분  $\bar{x}$ 를 구하시오.

**문제 6.** [25점] 3차 이하의 실수계수 다항식으로 이루어진 벡터공간을  $P_3$ 라고 하자.  $P_3$ 의 부분공간

$$W = \{ f \in P_3 \mid f'(0) = 0, f(1) = 0 \}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 다음  $P_3$ 의 세 벡터가 일차종속인지 일차독립인지 판별하시오.

$$5x^2 - 5, \quad x^3 - 2x^2 + 1, \quad 3x^3 - 3$$

(b) (15점)  $W$ 의 기저를 하나 찾고, 차원을 구하시오.

**문제 7.** [25점]  $n$ -공간의 점  $P$ 와 영이 아닌 벡터  $\mathbf{v}$ 에 대하여  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 가 등장변환이면

$$\{ T(X) \mid X \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \cdot (X - P) = 0 \}$$

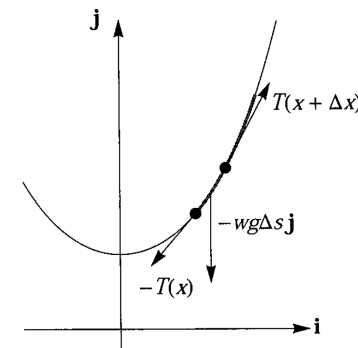
가  $n$ -공간의 초평면임을 보이시오.



**문제 8.** [25점] 양 끝이 고정되어 있는 끈이 중력에 의하여 이루는 자연스러운 곡선의 모양을 현수선(catenary)라고 부른다. 현수선

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (-b \leq x \leq b)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.(단,  $a, b > 0$ 이다.)



**그림 1.**

- (a) (10점) 현수선의 길이를 구하시오.
- (b) (15점) 중력가속도 상수  $g$ , 현의 작은 조각의 길이  $\Delta s$ , 현수선의 밀도  $w$ , 장력  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x)$ 에 대하여 균일한 밀도를 가진 현수선의 작은 조각이 이루는 힘의 평형은 그림 1과 같이

$$\mathbf{T}(x + \Delta x) - \mathbf{T}(x) - wg\Delta s\mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

로 표현되고, 이를 이용하여 현수선의 방정식  $y = a \cosh \frac{x}{a}$ 를 유도할 수 있다. 현수선의 접벡터를  $\mathbf{v} = (1, y'(x))$ 라 할 때,  $a$ 를  $\mathbf{T}, \mathbf{v}, w, g$ 에 대한 식으로 나타내시오.