미적분학 1 중간고사 시험지

시험일정: 2021년 4월 17일 (토) 13:10 – 14:40(90분)

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점: 150점)

문제 1. [15점] 다음 각 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

(a) (5점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\left(1+\log(n+2)\right)^2}$

(b) (10점) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt{n}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

문제 2. [15점] 수열 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$의 부분합 $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \, (n \geq 0)$에 대해, 부분합의 거듭제곱급수

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

이 양의 수렴반경 r을 가진다고 하자. 이 때, 임의의 $|x| < r$에 대해 거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

가 수렴하고, $f(x) = (1-x)F(x)$가 성립함을 보이시오.

문제 3. [20점] 거듭제곱급수 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 가 원점을 포함하는 어떤 열린 구간 I 에 속하는 임의의 x 에 대해

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

를 만족한다. 이 때,

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 2)$$

임을 보이고, $f(x)$ 의 수렴반경을 구하시오.

문제 4. [15점] 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+2)!}$$

문제 5. [20점] 함수 $f(x) = e^x \arctan x$가 원점 근방에서 역함수 $g(x)$를 가짐을 보이고, 원점에서 $g(x)$의 2차 근사다항식 $p_2(x)$를 구하시오. 또한, $g(x) - p_2(x) = o(x^2)$이 성립함을 보이시오.

문제 6. [25점] 함수 $f(x) = e^x \sin x$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (15점) 원점에서의 테일러 급수 $Tf(x)$가 모든 실수 x에서 함수 f와 일치함을 테일러 정리를 이용하여 보이시오.

(b) (10점) $x = \pi$에서 $f(x)$의 3차 근사다항식을 구하시오.

문제 7. [15점] 함수

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

에 대해 $f(0.1)$ 의 근삿값을 오차가 10^{-6} 이하가 되도록 구하시오.

문제 8. [15점] 다음 두 곡선의 개형을 그리고, 모든 교점을 직교좌표계로 나타내시오.

$$r = \frac{4}{3+\sqrt{5}\cos\theta}, \quad r = \frac{\sqrt{5}}{\sin\theta - \cos\theta}$$

단, $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n은 정수)이다.

문제 9. [10점] 다음 직교좌표계 (x, y, z)로 표현된 식을 구면좌표계 (ρ, φ, θ)로 나타내시오.

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1, \quad z \ge \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \quad yz \ge 0$$