

수학 1 중간고사 시험지

시험일정: 2021년 4월 17일 (토) 13:10 – 14:40(90분)

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점: 150점)

문제 1. [25점] 다음 각 급수의 수렴 여부를 판정하시오.

(a) (5점) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{5^n}{n!}$

(b) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(1+\log(n+2))^2}$

(c) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2n} - \arcsin \frac{1}{2n+1} \right)$

문제 2. [15점] 양항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 에 대한 다음 명제의 참, 거짓을 판정하시오.

모든 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[n]{a_n} < 1$ 이면, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

문제 3. [20점] 수열 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 의 부분합 $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n (n \geq 0)$ 에 대해, 부분합의 거듭제곱급수

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

이 양의 수렴반경 r 을 가진다고 하자. 이 때, 임의의 $|x| < r$ 에 대해 거듭제곱급수

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

가 수렴하고, $f(x) = (1-x)F(x)$ 가 성립함을 보이시오.

문제 4. [15점] 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+2)!}$$

문제 5. [25점] 함수 $f(x) = \sinh(2x) + \arctan x$ 가 역함수를 가짐을 보이고, 이 역함수를 g 라 할 때 원점에서 g 의 3차 근사다항식을 구하시오.

문제 6. [15점] 함수

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

에 대해 $f(0.1)$ 의 근삿값을 오차가 10^{-6} 이하가 되도록 구하시오.

문제 7. [20점] 다음 두 곡선의 개형을 그리고, 모든 교점을 직교좌표계로 나타내시오.

$$r = \frac{4}{3 + \sqrt{5} \cos \theta}, \quad r = \frac{\sqrt{5}}{\sin \theta - \cos \theta}$$

단, $\theta \neq \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n 은 정수)이다.

문제 8. [15점] 다음 직교좌표계 (x, y, z) 로 표현된 식을 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 로 나타내시오.

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, \quad z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \quad yz \geq 0$$