

미적분학1 기말고사

시험일정: 2020년 6월 13일(토) 12:50 - 15:30

파일명 형식: 학번뒷번호5자리-이름

파일명 예시: 13579-김도형.pdf

총 10 문제, 각 문항당 20점입니다. 총점은 200점입니다. 제한시간은 2시간입니다.

1. 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

에 대응되는 선형사상을 L_A 라 하자.

- (a) [10점] $L_A(\mathbf{v}) = 0$ 를 만족하는 영이 아닌 3차원 공간의 벡터 \mathbf{v} 를 하나 찾으시오.
- (b) [10점] 치역이 평면임을 보이고, 그 평면의 방정식을 구하시오.

2. 영이 아닌 벡터 $X \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $n \times n$ 행렬

$$A := I_n - \frac{2}{|X|^2}XX^t$$

는 직교행렬임을 보이시오.

3. (a) [5점] 치환 (1234)를 호환의 곱으로 나타내시오.

(b) [5점] x, y 는 영이 아닌 실수이고 행렬 $A(x, y) = (a_{ij})$ 은

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ x & 1 & 0 & y \end{pmatrix}$$

으로 주어졌다. $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4} \neq 0$ 이 되는 4-치환 σ 를 모두 구하시오.

(c) [10점] 위에서 구한 치환들의 부호를 구하고, 이를 이용하여 $A(x, y)$ 의 행렬식을 x, y 에 관한 식으로 나타내시오.

4. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ 에 대해서 함수

$$M_{\mathbf{a}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

를 $M_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ 로 정의한다. 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ 에 대해서

$$M_{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} = M_{\mathbf{a}}M_{\mathbf{b}} - M_{\mathbf{b}}M_{\mathbf{a}}$$

가 됨을 보이시오.

5. V 는 x 를 변수로 갖는 3차 이하의 다항식의 집합이라고 하자.

(a) [10점] $1, x, \frac{x(x+1)}{2}, \frac{x(x+1)(x+2)}{6}$ 이 V 의 기저가 됨을 보이시오.

(b) [10점] 부분집합 $W \subset V$ 을

$$W = \{f(x) \in V : f(-1) = 0\}$$

으로 정의할 때, W 가 벡터공간이 됨을 보이고, 기저를 하나 찾으시오.

6. 극좌표로 표현된 평면의 곡선

$$r = 3\theta^2, \quad 1 \leq \theta \leq 2$$

의 개형을 그리고, 길이를 구하시오.

7. 3차원 공간 속의 곡선

$$X(t) = (\cos t, t \sin t, t),$$

의 $t = \pi$ 인 점에서 접촉평면의 식을 구하시오.

8. 평면 위의 곡선

$$X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

를 호의 길이로 매개화하시오.

9. 곡선

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \quad x, y \geq 0$$

의 중심을 구하시오.

10. 좌표평면의 정규곡선 $X: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 에 대해서

$$\frac{X'(t)}{|X'(t)|} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad a \leq t \leq b$$

로 두면 X 의 전곡률은

$$\int \kappa \, ds = \int_a^b |\theta'(t)| \, dt$$

임을 보이시오.