

미적분학 2 기말고사 시험지1

시험일정: 2020년 12월 5일 (토) 13:20 – 14:20(60분)

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (시험지1 총점: 100점)

문제 1. [20점] 삼차원 좌표공간에서 위쪽 경계는 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 아래쪽 경계는 포물면 $z = x^2 + y^2$ 인 영역의 중심을 구하시오.

문제 2. [20점] 좌표평면에서 직선 $y = 0$, $y = x$ 와 쌍곡선 $xy = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ 로 둘러싸인 제1사분면의 영역 D 에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{1 + 2xy} dx dy.$$

문제 3. [20점] 좌표평면에서 벡터장 $\mathbf{F} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ 가 극좌표계로 주어진 곡선

$$r = 1 + \cos \theta + \sin \theta, \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

을 수직으로 통과하는 양(flux)의 절댓값을 구하시오.

문제 4. [20점] 좌표평면 위의 곡선 $(\cos^3 t - \sin^3 t, \cos^3 t)$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

문제 5. [20점] 밑면의 반지름이 R 이고 높이가 h 이며 질량이 M 인 (속이 짝 찬) 직원뿔이 균일한 밀도를 가지고 있다고 하자. 직선 l 이 직원뿔의 꼭짓점을 지나며 밑면에 평행하다고 할 때, l 에 대한 직원뿔의 관성모멘트를 구하시오.

미적분학 2 기말고사 시험지2

시험일정: 2020년 12월 5일 (토) 14:50 – 15:50(60분)

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (시험지2 총점: 100점)

문제 6. [20점] 삼차원 좌표공간의 단위 북반구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ 에 포함되는 곡면 S 가 있다. S 의 중심을 (x_0, y_0, z_0) 라 하자. S 를 xy -평면에 정사영한 영역을 D 라 할 때,

$$z_0 = \frac{\text{Area}(D)}{\text{Area}(S)}$$

임을 보이시오.

문제 7. [20점] 삼차원 좌표공간의 곡면 $S : z = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$ 에서 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_S \frac{x(x^2 + z)}{\sqrt{x^2 + y + (1 - x^2) \cos^2 z + z \sin^2 z}} dS.$$

문제 8. [20점] 삼차원 좌표공간의 곡면 $x = y^2 + z^2$ 과 평면 $x = 1$ 로 둘러싸인 영역을 R 이라고 할 때, 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

가 영역 R 의 경계 ∂R 을 빠져나가는 양(flux)을 구하시오.

문제 9. [20점] 삼차원 좌표공간의 곡면 $E : 2x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0$ 과 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xy} - y^2z, \cos(xy) - z^3, \sin(x^2 + z) + y^3)$$

에 대하여 면적분

$$\iint_E \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

를 구하시오. 단, 곡면 E 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \geq 0$ 을 만족하도록 정한다.

문제 10. [20점] 삼차원 좌표공간에서, 밀도가 원점으로부터의 거리 ρ 에 대한 함수 $\mu(\rho)$ 로 주어져 있을 때 원점을 중심으로 하고 반지름이 ρ 인 딱 찬 공의 질량을 $m(\rho)$ 라 하자. 이 때, $0 < |X| \leq r$ 이면

$$\iiint_{|P| \leq r} \mu(|P|) \mathbf{A}_X(P) dV(P) = -m(|X|) \frac{X}{|X|^3}$$

이 성립함을 보이시오. (단, \mathbf{A}_X 는 점 X 를 기준으로 하는 입체각 벡터장이다.)