

연습문제 3.5

1. 공 모양의 풍선에 공기를 $50\text{cm}^3/\text{sec}$ 의 비율로 불어 넣고 있다.

(a) 풍선의 반지름이 5cm 일 때 반지름의 시간에 대한 증가율을 구하여라.

(b) 풍선의 반지름이 5cm 일 때 표면적의 시간에 대한 증가율을 구하여라.

Answer (a) $1/(2\pi) \doteq 0.159\text{cm}/\text{sec}$ (b) $20\text{cm}^2/\text{sec}$

2. 반지름이 150cm 인 원기둥 모양의 물탱크에서 분당 100L 의 물이 바닥의 구멍을 통하여 빠져 나오고 있다. 높이가 250cm 일 때 높이의 변화율은 얼마인가? (단위에 주의할 것 : $1\text{m}^3=1000\text{L}$)

Answer $-\frac{2}{45\pi} \doteq -0.1415\text{m}/\text{min}$ 또는 $-14.15\text{cm}/\text{min}$

3. 같은 지점에서 두 대의 차가 출발하였다. 한 대는 북쪽으로 $1\text{km}/\text{min}$ 의 속도로 움직이고 다른 한 대는 서쪽으로 $0.75\text{km}/\text{min}$ 의 속도로 움직인다면 5분 후 두 차가 멀어지는 속도는 얼마인가?

Answer $1.25\text{ km}/\text{min}$

4. 배가 섬 근처를 직선항로를 따라 운항하고 있다. 이 섬 선착장에 배가 가장 가깝게 접근한 거리는 60m 이고 이 배는 초당 4m 의 속도로 동쪽으로 움직인다.

(a) 배가 선착장에서 멀어지기 시작한 지 1분 후 배가 선착장에서 멀어지는 속도를 구하여라.

(b) 배에서 선착장까지의 거리가 100m 가 되었을 때 배가 선착장에서 멀어지는 속도를 구하여라.

Answer (a) $\frac{16\sqrt{17}}{17}\text{m}/\text{sec}$ (b) $3.2\text{m}/\text{sec}$

5. 타원 모양의 체육관에 직사각형 모양의 운동장을 만들려고 한다. 운동장의 넓이가 최대가 되는 가로와 세로의 길이를 구하여라. 단 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

이라고 한다.

Answer 가로: $a\sqrt{2}$, 세로: $b\sqrt{2}$

6. 바람없는 날 열기구가 수직으로 상승하고 있다. 출발지점에서 100m 떨어진 지점에서 열기구를 올려다 본 각도가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때 각도의 증가속도는 $0.1\text{rad}/\text{min}$ 이었다. 이때 열기구의 상승속도는 얼마인가?

Answer $20\text{m}/\text{min}$

7. 수요함수가 다음과 같이 주어지 있다

$$p(q+1)^2 = 900$$

가격이 4(단위 만원)일 때 수요량의 가격에 대한 변화율 $\frac{dq}{dp}$ 를 구하여라.

Answer $-\frac{15}{8}$

8. 음함수 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(a) $x^3 + y^3 = 1$

(b) $x^2y + xy^2 = 1$ T p209 19 (c) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

Answer (a) $-\frac{x^2}{y^2}$

(b) $-\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)}$

(c) $-\frac{3x^2+2xy-1}{x^2+1}$

9. (a) 음함수의 미분법을 이용하여 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_0, y_0) 에서 접선의 방정식은

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

임을 보여라.

- (b) 음함수의 미분법을 이용하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_0, y_0) 에서 접선의 방정식은

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

임을 보여라.

Answer 생략

10. 양의 실수 k 에 대하여 다음과 같이 주어진 두 곡선이 직교함을 보여라. (¶)

$$2x^2 + y^2 = k^2, \quad x = y^2$$

Solution k 의 값에 상관없이 두 점에서 만난다. 만나는 점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 이 점에서 타원의 기울기와 포물선의 기울기는 음함수 미분법을 이용하면 각각

$$m_1 = -\frac{2x_1}{y_1}, \quad m_2 = \frac{1}{2y_1}$$

이다. 첫번째 식에서 $x_1 = y_1^2$ 을 대입하면

$$m_1 = -\frac{2y_1^2}{y_1} = -2y_1, \quad m_2 = \frac{1}{2y_1}$$

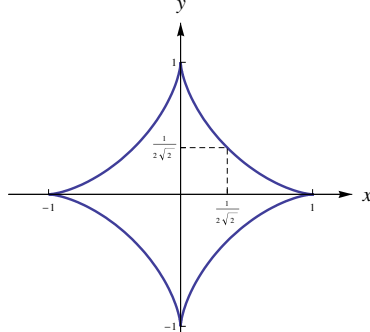
을 얻는다. 따라서 $m_1 \cdot m_2 = -1$ 이고 두 곡선은 직교한다.

11. 다음과 같이 정의되는 곡선을 **아스트로이드(astroid)**라고 부른다.

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

- (a) 곡선 위의 점 (a^3, b^3) 에서 접선의 방정식을 구하여라.

- (b) 1 사분면에 있는 곡선 위의 점 (a^3, b^3) 에서 접선을 그렸을 때, 1 사분면에 있는 접선 부분의 길이는 항상 1 이 됨을 보여라.



Solution (a) 곡선 위의 점 (a^3, b^3) 에서 접선의 방정식은 $y = -\frac{b}{a}x + b$
 (b) x -절편 $(a, 0)$, y -절편 $(0, b)$ 이므로 1 사분면에 있는 접선부분의 길이는 $\sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ 이다.

12. 함수 $y = f(x)$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식이 $y = 2x - 1$ 이다. $y = f^{-1}(x)$ 위의 점 (b, a) 에서 접선의 방정식을 구하여라.

Answer $y = (x + 1)/2$

13. f 가 순증가함수이면 f^{-1} 도 순증가함수임을 보여라.

Answer 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다. $g = f^{-1}$ 이라고 하면 $g'(y) = 1/f'(x) > 0$ 이므로 g 도 순증가함수이다.

14. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ 의 역함수 $g = f^{-1}$ 가 존재함을 보이고 $g'(-3)$ 을 구하여라.

Solution $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 3(x-1)^2 + 1 > 0$ 이므로 순증가하고 따라서 역함수 존재, $g'(-3) = \frac{1}{f'(1)} = 1$