미적분학 2 중간고사

시험일정 : 2020년 10월 17일 (토) 12:50 – 15:30

파일명 형식 : 학번-이름

파일명 예시 : 0000-00000-○○○.pdf

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 : 150점)

문제 1. [15점] 좌표평면에서 정의된 다음 함수에 대하여 물음에 답하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (5점) $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$ 이 존재하면 구하시오.

(b) (5점) f 는 $(0,0)$ 에서 미분가능함을 보이시오.

(c) (5점) f 는 일급함수가 아님을 보이시오.

문제 2. [10점] 타원면 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$를 생각하자. 타원면 밖의 한 점 $(2, 2, 2)$에서 원점을 향해 쏜 빛이 타원면에 반사되어 나올 때, 반사된 뒤의 빛이 지나는 길을 포함하는 직선의 방정식을 구하시오.

문제 3. [15점] 어떤 플랫폼의 수익 공식이 뷰어 수 x명과 뷰어당 평균 시청 시간 y분에 대해 $f(x,y) = x^{2.25}y^2$라고 하자. 9999명이 평균 101분을 시청하였을 때의 수익의 근삿값을 점 $(10000, 100)$에서의 f의 근사다항식을 이용하여 구하려고 한다.

(a) (6점) 1차 근사다항식을 이용하여 구하시오.

(b) (9점) 2차 근사다항식을 이용하여 구하시오.

문제 4. [10점] 높이는 h cm, 밑면의 반지름은 r cm인 원통형의 콜라 캔을 만들려고 한다. 캔의 용량이 200 cm^3 라고 하고, 캔의 재료인 알루미늄의 양은 원통의 표면적에 비례한다고 할 때, 알루미늄의 양을 가장 적게 사용하여 만들 수 있는 캔의 높이와 반지름을 구하시오.

문제 5. [15점] 함수 $f(x, y) = 8x^2 - 2y$가 주어져 있다고 하자. 라그랑주 승수법을 이용하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) 집합 S_1은 영역 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$의 경계이다. 이때, 함수 f를 S_1에 제한하였을 때의 최대점과 최소점을 구하고, 그 점들에서의 함숫값을 구하시오.

(b) (10점) 집합 S_2는 영역 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq |x|\}$의 경계이다. 이때, 함수 f를 S_2에 제한하였을 때의 최대점과 최소점을 구하고, 그 점들에서의 함숫값을 구하시오.

문제 6. [15점] 함수 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+2z^2}-\cos(xz)-\sin x$ 의 등위면 $f(x,y,z)=0$ 위의 한 점 $P=(0,1,0)$ 이 주어져 있다고 하자.

(a) (8점) 점 P 근방에서 f 의 등위면이 $y=g(x,z)$ 의 그래프로 나타나는 일급 함수 g 가 존재하는지 설명하고, 존재한다면 $D_1g(0,0)$ 과 $D_2g(0,0)$ 를 구하시오.

(b) (7점) 점 P 근방에서 f 의 등위면이 $z=h(x,y)$ 의 그래프로 나타나는 일급 함수 h 가 존재하는지 설명하고, 존재한다면 $D_1h(0,1)$ 과 $D_2h(0,1)$ 를 구하시오.

문제 7. [15점] 다음 벡터장들이 닫힌 벡터장인지 확인하시오. 또한 각각의 벡터장이 잠재함수를 가지는지 판별하여, 잠재함수를 가지지 않으면 그 이유를 설명하고, 잠재함수를 가지면 잠재함수를 구하시오.

(a) (5점) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$

(b) (5점) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \cos z - yze^x, x \cos z - ze^x, -xy \sin z - ye^x + z)$

(c) (5점) $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x, y)$

문제 8. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 경계가 $x^4+y^4=1$로 주어진 간이풀장에서 물의 속도가 벡터장 $\mathbf{F}(x,y)=(2x+3y, 10y^4+3x)$로 주어져 있다. 풀장에 떠있는 개미가 (1,0)에서 (0,1)까지 풀장의 경계를 반시계방향으로 이동하는 경로를 C_1이라 할 때, 벡터장 $\mathbf{F}$가 개미에게 한 일 $\displaystyle\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$를 구하시오. 또한 개미가 풀장 경계를 반시계방향으로 한 바퀴 돌았을 때 벡터장 $\mathbf{F}$가 개미에게 한 일을 구하시오.

(b) (10점) 간이풀장의 공기가 빠져서 경계의 반은 단위원의 일부 $\{(x,y) : x^2+y^2=1, y\geq 0\}$이 되고, 나머지 반은 포물선의 일부 $\{(x,y) : y=x^2-1, -1\leq x\leq 1\}$이 되었다. 나아가 물의 속도벡터장은 $\mathbf{F}(x,y)=(3y, x^2-y)$가 되었다. 개미가 풀장 경계를 반시계방향으로 한 바퀴 돌았을 때, 벡터장 $\mathbf{F}$가 개미에게 한 일을 구하시오.

문제 9. [15점] 좌표평면에서 정의된 함수 $f(x, y) = x^3 - 3x + y^3 - 27y$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (6점) 함수 f 의 극대점, 극소점과 안장점을 구하시오.

(b) (9점) (a)에서 언급한 각 점 근방의 등위선들의 개형을 그리시오. 각 점 근방에서 적어도 두 개의 서로 다른 함숫값에 대응하는 등위선을 그리시오.

문제 10. [20점] 다음 물음에 답하시오.

(a) (8점) 공간 $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{C}^2[0,1] \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$ 에서 정의된 범함수

$$\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^1 [\{f'(x)\}^2 + 12xf(x)]\, dx$$

의 오일러–라그랑주 방정식을 푸시오.

(b) (12점) 삼급함수 $L(x, y, z)$ 에 대하여 공간

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{C}^4[a,b] \mid f(a) = y_a,\ f(b) = y_b,\ f'(a) = z_a,\ f'(b) = z_b\}$$

에서 정의된 범함수

$$\mathcal{L} : \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b L(f(x), f'(x), f''(x))\, dx$$

의 극점 g 는 방정식

$$D_1L(g(x), g'(x), g''(x)) - \frac{d}{dx}D_2L(g(x), g'(x), g''(x)) + \frac{d^2}{dx^2}D_3L(g(x), g'(x), g''(x)) = 0$$

을 만족시킴을 보이시오.