고급수학 2 중간고사

(2020년 10월 17일 오후 1:00–3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

문제 1. [20점] 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (7점) f는 연속함수인지 판단하시오.

(b) (7점) f는 원점에서 모든 방향미분계수를 가지는지 판단하시오.

(c) (6점) 원점에서 함수 f의 미분가능성을 판단하시오.

문제 2. [15점] 함수 $f(x,y) = \dfrac{1}{y}e^{-xy}\sin(\pi y)$ $(y \neq 0)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (6점) 점 $P = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향의 단위벡터를 $\mathbf{v}$라 할 때, $D_{\mathbf{v}}f(P)$를 구하시오.

(b) (9점) 그래프 $z = f(x,y)$의 점 $\left(0, \dfrac{1}{2}, 2\right)$에서의 접평면의 식을 구하시오.

문제 3. [15점] $g(\pi) = 1$인 일급함수 $g(z)$와 다변수함수

$$f(x,y,z) = e^y g(z)\sin x + yz$$

및 곡선 $X(t) = (\sin t,\ -\cos^2 t,\ t)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (9점) $h(t) = f(X(t))$일 때, $h'(\pi)$를 구하시오.

(b) (6점) $X(\pi)$에서 f의 등위면에 접하는 평면의 방정식을 구하시오.

문제 4. [10점] 이급함수 $f(x,y)$의 원점에서의 2차 근사다항식이 $T_2f(x,y) = y + xy$ 일 때, $\dfrac{\partial(D_1 f, D_2 f)}{\partial(x,y)}(0,0)$ 을 구하시오.

문제 5. [15점] 함수 $f(x,y) = \sqrt{2}\cos x + x\sin y$의 극대점을 모두 구하시오.

〈 연습용 여백 〉

학번: 이름:

문제 6. [15점] xyz-공간에서 원기둥좌표계로 나타낸 다음 영역

$$r = (6 - z)\cos\theta, \quad 0 \le z \le 6$$

에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = xyz$의 최대점과 최소점을 구하시오.

문제 7. [10점] 어떤 함수 $f(x, y, z)$를

$$(x, y, z) = F(u, v, w)$$

로 치환하여 나타낸 것을 $g(u, v, w)$라고 하자. uvw-공간의 어떤 점 P에서 F의 야코비 행렬이

$$F'(P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이고, $F(P)$에서 f의 기울기벡터가 $(2, 1, 1)$일 때, P에서 g의 기울기 벡터를 구하시오.

문제 8. [15점] 곡선 $X(t) = (\cos nt, \sin nt)$ $(0 \le t \le 2\pi)$를 따르는 벡터장

$$\mathbf{F} = \left(\frac{2020^x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y^{2020}}{x^2 + y^2} \right)$$

의 선적분 $\displaystyle\int_X \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$를 구하시오. (단, $n \in \mathbb{Z}$)

문제 9. [15점] 양수 a, b에 대해 $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (a, b)$라 할 때 C_1은 O에서 A까지 직선으로 갔다가 C까지 직선으로 가는 경로이며, C_2는 O에서 B까지 직선으로 갔다가 C까지 직선으로 가는 경로라 하자.

평면 위의 이급 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$가

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

를 만족한다고 할 때 다음 물음에 답하시오.

(a) (5점) $\displaystyle\int_0^a (P(t, b) - P(t, 0))\, dt = \int_0^b (Q(a, s) - Q(0, s))\, ds$가 성립함을 보이시오.

(b) (10점) 임의의 양수 a, b에 대해 (a)가 성립한다고 할 때, 다음 등식을 보이시오.

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \qquad (x, y > 0)$$

문제 10. [10점] 곡선

$$X(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

에 대하여 선적분 $\displaystyle\int_X 2xe^z\, dx + \sin z\, dy + \left(x^2 e^z + y \cos z\right) dz$를 구하시오.

문제 11. [10점] 함수 $f(x, y, z) = x^2 y + e^x + z$에 대하여, $(y, z) = (1, -1)$의 근방에서 $g(1, -1) = 0$, $f(g(y, z), y, z) = 0$을 만족하는 일급함수 $g(y, z)$가 존재함을 보이고 $\operatorname{grad} g(1, -1)$을 구하시오.

〈 연습용 여백 〉