

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 150점)

(연습용 여백)

문제 1 [20점] 급수 $\sum a_n$ 과 $\sum b_n$ 은 각각 0이 아닌 항들로 이루어진 수열 (a_n) 과 (b_n) 에서 얻은 급수이다. 다음 명제들 중에서 거짓인 명제를 모두 찾고 각각 반례를 제시하시오. (단, 참인 명제에 대한 증명을 하지 않아도 된다.)

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이면, $\sum a_n$ 은 수렴한다.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 이면, $\sum a_n$ 이 수렴할 필요충분조건은 $\sum b_n$ 이 수렴하는 것이다.
- (c) 양수의 수열 (a_n) 이 모든 n 에 대하여 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ 이면, 급수 $\sum a_n$ 은 수렴한다.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ 이 존재하고 $\rho < 1$ 이면, $\sum a_n$ 은 절대수렴한다.
- (e) $\sum |a_n|$ 이 수렴하면, $\sum a_n^2$ 은 수렴한다.
- (f) $\sum a_n$ 이 수렴하면, $\sum a_n^3$ 은 절대수렴한다.

문제 2 [20점] 다음 급수의 수렴, 발산을 판정하고 그 근거를 밝히시오.

- (a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
- (b) (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n + n(\log n)^4}$

문제 3 [20점] 다음 거듭제곱급수가 수렴하는 실수 x 의 범위를 구하시오.

- (a) (10점) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tan \frac{1}{n} \right) x^n$
- (b) (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n$

문제 4 [10점] 다음 급수의 합을 구하시오.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)n!}$$

문제 5 [15점] 함수값이 모두 양수인 연속함수 $h(x)$ 에 대하여, 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = x + \int_0^x h(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

다음 물음에 답하시오.

- (a) (5점) $f(x)$ 의 역함수 $g(y)$ 가 존재함을 보이시오.
- (b) (10점) 원점에서 $h(x)$ 의 일차근사다항식이 $a + bx$ 일 때, 원점에서 $g(y)$ 의 이차근사다항식을 구하시오. (단, a, b 는 실수이다.)

(연습용 여백)

문제 6 [10점] 두 번 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 원점 근방에서의 2차 근사다항식이 $1 + 5x + 2x^2$ 라고 할 때, 함수 $g(x) = \log |f(x)|$ 의 원점 근방에서의 2차 근사다항식을 구하시오.

문제 7 [10점] 다음 정적분의 값을 오차의 범위가 10^{-7} 이내가 되도록 구하시오.

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^3} dx$$

문제 8 [15점] 다음에 답하시오.

- (a) (5점) $x = 16$ 에서 $f(x) = \sqrt[4]{x}$ 의 2차 근사다항식 $T_2^{16}f(x)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) $15 \leq x \leq 17$ 일 때, $|f(x) - T_2^{16}f(x)| \leq 3.5 \times 10^{-5}$ 임을 보이시오. (단, $15^{-\frac{11}{4}} < 6 \times 10^{-4}$ 이다.)

문제 9 [10점] 극좌표계로 다음과 같이 주어진 부등식에 의해 정의된 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

- (a) (5점) $-1 \leq r \leq 2$ 이고 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
- (b) (5점) $r^2 \leq \cos 2\theta$

문제 10 [10점] 다음 영역의 부피를 구하시오.

- (a) (5점) 구면좌표계로 주어진 영역

$$\{ (\rho, \varphi, \theta) \mid \rho \leq \sin \varphi \sin \theta \}$$

- (b) (5점) 원기둥 좌표계로 주어진 영역

$$\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 3 - z, \quad z \geq 0 \}$$

문제 11 [10점] 극좌표계로 주어진 다음 두 곡선을 직교좌표로 나타내고, 두 곡선을 하나의 좌표평면에 그리시오. 또한 두 곡선의 교점을 직교좌표로 나타내시오.

$$r = \frac{2}{1 - \sin \theta}, \quad r = \frac{-1}{2 \sin \theta - \cos \theta}$$