

수학 1 기말고사
(2020년 6월 13일 오후 1:00-4:00)

학번:	이름:
-----	-----

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 300점)

(연습용 여백)

문제 1 [20점] 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ 의 수렴, 발산을 판정하시오.
- (b) (10점) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\log n}$ 의 수렴, 발산을 판정하시오.

문제 2 [20점] $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x)$ 를 x 에 관한 함수로 나타내시오.

문제 3 [20점] 함수 $f(x) = e^x \sin x$ 에 대하여

- (a) (10점) 원점에서 $f(x)$ 의 3차 테일러 다항식 $T_3(x)$ 를 구하시오.
- (b) (10점) 부등식 $|e \sin 1 - T_3(1)| \leq \frac{e}{6}$ 을 보이시오.

문제 4 [20점] 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$$

의 합을 구하시오.

문제 5 [20점] 원기둥좌표계로 주어진 방정식

$$z = r^2 \sin 2\theta$$

를 직교좌표계 (x, y, z) 와 구면좌표계 (ρ, φ, θ) 의 방정식으로 각각 나타내시오.

문제 6 [20점] 선형사상 $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 다음을 만족한다.

$$L \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

이때 선형사상 L 에 대응되는 행렬의 행렬식을 구하시오.

(연습용 여백)

문제 7 [40점] 삼차원 공간에서 일차독립인 두 벡터 $(a, b, c), (p, q, r)$ 에 대하여 평면 $ax + by + cz = 0$ 에 대한 대칭변환 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 과 평면 $px + qy + rz = 0$ 에 대한 대칭변환 $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해 다음 질문에 답하시오.

(a) (20점) 선형변환 T 에 대응되는 행렬 A 를 구하시오.

(b) (20점) (a)에서 언급한 행렬 A 와 선형변환 S 에 대응되는 행렬을 B 에 대하여,

$$AB = BA$$

일 필요충분조건은

$$ap + bq + cr = 0$$

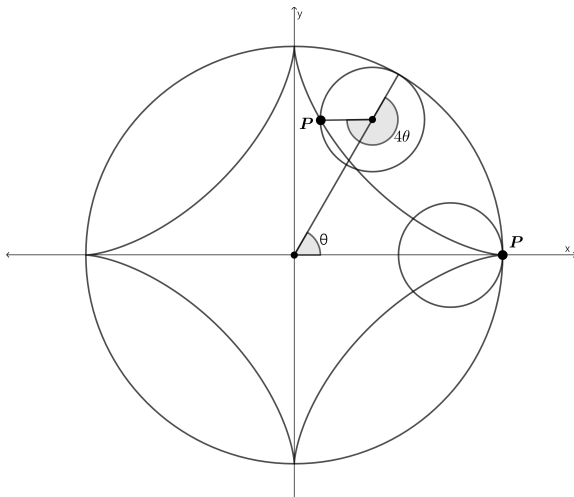
임을 보이시오.

문제 8 [20점] 삼차원 공간의 세 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 가 일차독립이면 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ 도 일차독립임을 보이시오.

문제 9 [30점] 다음 그림과 같이 원점이 중심이고 반지름이 4인 원의 내부에 반지름이 1인 원이 내접하며 큰 원을 따라 시계 반대 방향으로 회전하고 있다. 작은 원의 한 점 P 가 점 $(4, 0)$ 에서 출발하여 움직일 때 점 P 의 자취를 매개화된 곡선으로 나타내려 한다. 이때 다음 질문에 답하시오.

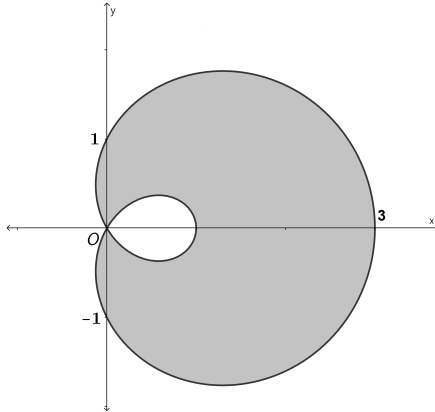
(a) (15점) 그림에서 표시된 θ 를 매개변수로 하여 곡선을 매개화하시오.

(b) (15점) (a)에서 언급한 곡선의 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 범위에서의 길이를 구하시오.



문제 10 [20점] 극좌표계로 주어진 곡선 $r = 1 + 2 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)의 작은 고리와 큰 고리 사이의 넓이를 구하시오.

(연습용 여백)

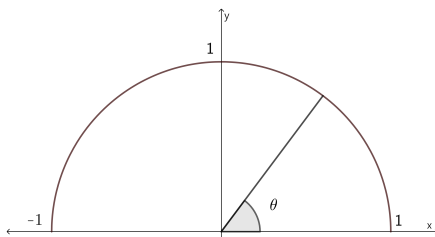


문제 11 [20점] 곡선 $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos(t/2))$ 에 대하여 곡선 위의 점 $(\pi, 2, 0)$ 에서 접촉평면의 식을 구하시오.

문제 12 [20점] 반원

$$C : r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

의 선밀도함수가 $\mu(\theta) = \theta$ 로 주어질 때, 곡선 C 의 질량중심의 y 좌표를 구하시오.



문제 13 [30점] 사이클로이드의 매개화가 다음과 같이 주어져 있다.

$$X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}$$

이 곡선 위의 점 $P = X(\pi)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (15점) 점 P 에서의 곡률을 구하시오.
- (b) (15점) 점 P 에서의 접촉원의 중심을 구하시오.