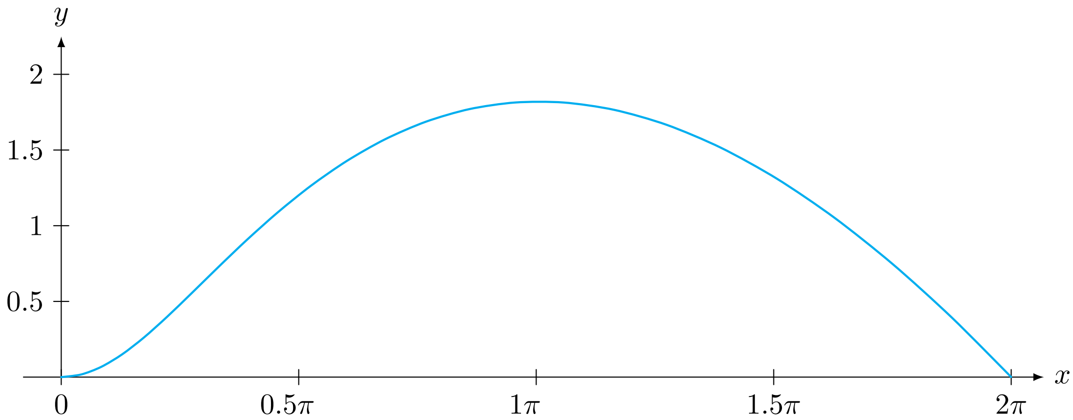
1. [단답형] (15점) 좌표평면에서 곡선

$$X(t) = (2t - \sin t, t \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$$

와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

Solution

$X(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



주어진 영역을 U라 하면 **따름정리 15.5.0.4**에 의해 U의 넓이는

$$\begin{aligned} -\int_{\partial U} y\,dx &= \int_0^{\pi} t \sin t (2 - \cos t)\,dt + \int_0^{2\pi} 0\,dx \\ &= \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. [단답형] (20점) 위 아래가 잘린 원기둥면 $S : x^2+y^2=1$ $(-1 \le z \le 2)$에 대하여 S 위의 점 (x,y,z)에서 곡면의 향이 $\mathbf{n}=(x,y,0)$으로 주어질 때, 다음 벡터장 $\mathbf{F}$의 곡면 S에 대한 면적분 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$를 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(x+e^{yz}, y+e^{xz}, z+e^{xy})$$

Solution

위 아래 원판을 포함한 곡면을 S_0, 이로 둘러싸인 원기둥을 C_0라 하자. 발산정리에 의해

$$\begin{aligned}
9\pi &= \iiint_{C_0} 3\mathrm{d}V \\
&= \iiint_{C_0} \mathrm{div}\mathbf{F}\mathrm{d}V \\
&= \iint_{S_0} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\
&= \iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}(x,y,2)\cdot(0,0,1)\mathrm{dS} + \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathbf{F}(x,y,-1)\cdot(0,0,-1)\mathrm{dS} \\
&= \iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{x^2+y^2\le 1} 2+e^{xy}\mathrm{dS} + \iint_{x^2+y^2\le 1} -(-1+e^{xy})\mathrm{dS} \\
&= \iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + 3\pi.
\end{aligned}$$

따라서,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 6\pi.$$

3. (15점) 실수 $0 < a < b$와 좌표평면의 영역 $T = \{(x, y) : a \le x + y \le b, x \ge 0, y \ge 0\}$에 대하여 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_T \frac{x^2 + y^2}{(x+y)^4}\, dx\, dy$$

Solution

$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$를

$$G(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$$

로 정의하자. 이때 $G^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$가

$$G^{-1}(x, y) = (x - y, x + y)$$

로 잘 정의된다. G, G^{-1}가 모두 일급이므로 G는 일급가역함수다. $U = G^{-1}(T)$라 하면

$$\begin{aligned} U &= \left\{(u, v) : a \le \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{2} \le b,\ \frac{u+v}{2} \ge 0,\ \frac{v-u}{2} \ge 0\right\} \\ &= \{(u, v) : a \le v \le b,\ -v \le u \le v\} \end{aligned}$$

이다. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)^4}$에 대해

$$\begin{aligned} \int_T f(x, y) \mathrm{d}V &= \int_U f(G(u, v)) \left|\det G'(u, v)\right| \mathrm{d}V \\ &= \int_a^b \int_{-v}^{v} \frac{u^2 + v^2}{2v^4} \frac{1}{2}\, du\, dv \\ &= \int_a^b \frac{2}{3v}\, dv \\ &= \frac{2}{3} \log \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

채점기준

– 모범답안과 같은 풀이를 시도한 경우

- 일급가역함수로 치환적분을 시도하면 5점.
- 치환적분을 올바르게 적용하면 5점.
- 일급가역함수로 치환적분을 올바르게 적용한 경우 답이 맞으면 5점.

– 모범답안과 다른 풀이를 시도한 경우

- 옳은 답이 논리적으로 도출되면 15점, 아니면 0점.

4. (20점) 극좌표계로 주어진 두 영역 $A_1 = \{(r,\theta) : r \le 1\}$, $A_2 = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 2\cos\theta\}$에 대해 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_{A_1 \cup A_2} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

Solution

$$\begin{aligned}
&\iint_{A_1 \cup A_2} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy \\
&= \iint_{A_1 \cup A_2} \sqrt{4 - r^2} \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\max(1,\ 2\cos\theta)} \sqrt{4 - r^2} \cdot r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\max(1,\ 2\cos\theta)} d\theta \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{1}{3}\left(\int_0^{\pi/3} 8\sin^3\theta\, d\theta + \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 3\sqrt{3}\, d\theta - \int_{5\pi/3}^{2\pi} 8\sin^3\theta\, d\theta \right) \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{3}\left(\int_0^{\pi/3} 8(1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta - \int_{5\pi/3}^{2\pi} 8(1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \right) \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{8}{3}\left(\left[\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta \right) \right]_0^{\pi/3} - \left[\left(\cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta \right) \right]_{5\pi/3}^{2\pi} \right) \\
&= \frac{16\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{10}{9}.
\end{aligned}$$

채점기준

- 모범답안과 같은 풀이를 시도한 경우
  - 극좌표로 치환하면 5점
  - 적분 영역을 잘 나타내면 8점
  - 극좌표로 치환한 뒤 적분 영역을 잘 나타낸 경우 답이 맞으면 7점
- 모범답안과 다른 풀이를 시도한 경우
  - 옳은 답이 논리적으로 도출되면 20점, 아니면 0점.

5. (20점) 좌표공간의 곡면 $S : z = 4 - x^2 - y^2$ $(z \geq 2)$ 에서 입체각 벡터장 $\mathbf{A}$의 플럭스를 구하시오. (단, 곡면 S 의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ 가 되도록 한다.)

Solution

곡면 S 와 $S' : x^2 + y^2 = 2$ 로 둘러쌓인 부분을 R 이라고 표기하자. 곡면 S' 에서의 향 또한 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$ 로 선택하자. 그러면

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_R \mathrm{div}(\mathbf{A})\mathrm{d}V && (\because)\ \mathrm{div}(\mathbf{A}) = 0 \\ &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} && (\text{발산 정리}) \end{aligned}$$

이기 때문에, 구하고자 하는 플럭스는 $\displaystyle\iint_{S'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 와 같게 된다.

이제 곡면 S' 은 $X(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2)$ $(0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ 로 매개화할 수 있고, 구하는 답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint_{S'} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \iint_{S'} \mathbf{A} \cdot (0,0,1)\mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \iint_{S'} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2r}{(r^2+4)^{\frac{3}{2}}}\, dr\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2r}{(r^2+4)^{\frac{3}{2}}}\, dr \\ &= 2\pi \int_4^6 u^{-\frac{3}{2}}\, du \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

채점기준

- 다음 중에서 가장 많은 부분점수를 받을 수 있는 채점기준을 적용함.
- 발산정리 사용
  - 발산정리를 올바르게 사용하여,
    $$S\text{에서의 플럭스} = \iint_{S'} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\mathbf{S}$$
    를 유도하면 7점.
  - 나머지 풀이가 올바르면 13점.
- 입체각의 성질 사용
  - 플럭스가 단위 구면에 맺힌 S의 상과 같다는 식을 세우면 7점. 이때, 단위구면에서의 넓이가 정확한 식으로 표현되어야 함.
  - 나머지 풀이가 올바르면 13점.
- 그 외 풀이
  - 옳은 풀이이면 20점, 아니면 0점.

6. (15점) 안쪽에 원점을 포함하는 좌표평면의 단순폐곡선 C에 대하여 다음 적분을 구하시오. (단, C의 방향은 반시계방향이다.)

$$\int_C \frac{2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

Solution

(1) 그린 정리를 쓴 풀이

벡터장 $\mathbf{F} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(2xy, (y^2-x^2))$에 대해, 주어진 적분은 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$와 같다. 한편 적당한 양수 ϵ이 있어서 반지름이 ϵ이고 중심이 원점인 원 $C_\epsilon := \{x^2+y^2=\epsilon^2\}$ 바깥에 C가 있도록 할 수 있다. 이때 C_ϵ의 방향은 반시계방향으로 정한다. 이제 C_ϵ과 C로 둘러싸인 영역을 D라 하자. 그러면

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

이므로, 그린 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} - \int_{C_\epsilon}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_D \mathrm{rot}\mathbf{F}\,dV_2 = 0.$$

따라서 C_ϵ의 점을 $X(t) = (\epsilon\cos t, \epsilon\sin t)$ $(0\le t\le 2\pi)$로 매개화하면 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_\epsilon}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi}\mathbf{F}(X(t))\cdot X'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{(2\cos t\sin t,\ \sin^2 t - \cos^2 t)}{\epsilon^2}\cdot\epsilon(-\sin t, \cos t)dt \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{\epsilon}(-\sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t)dt = -\frac{1}{\epsilon}\int_0^{2\pi}\cos(2t-t)dt = 0.\end{aligned}$$

(2) C를 매개화한 풀이

C를 $X(t) = (x(t), y(t))$ $(0\le t\le 1)$로 매개화하자. 이때 $x(t)$와 $y(t)$는 조각적 일급인 연속함수이고, $x(0)=x(1), y(0)=y(1)$이다. 그러면 구하는 적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot x' + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot y'\,dt \\ &= \left[\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\cdot x + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot y\right]_0^1 - \int_0^1\left[\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)'\cdot x + \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)'\cdot y\right]dt \\ &= 0 - \int_0^1\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'dt = \left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

위 등식에서 둘째 줄은 부분적분으로 얻었고, 셋째 줄은 $x(t)$와 $y(t)$가 경계값이 각각 같다는 점에서 얻었다.

(3) 선적분 기본정리를 쓴 풀이

벡터장 $\mathbf{F} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(2xy, (y^2-x^2))$은 원점을 뺀 곳에서 잠재함수 $f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$를 가지므로, 닫힌곡선 C에서 선적분 기본정리를 쓰면 구하는 답은

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathrm{grad}\,f\cdot d\mathbf{s} = [f]_{\partial C} = [f]_\varnothing = 0.$$

채점기준

다음 중에서 가장 많은 부분점수를 받을 수 있는 채점기준을 적용함.

- **(1)**과 같은 풀이를 시도한 경우
  - rot$\mathbf{F} = 0$임을 밝히면 5점.
  - 충분히 작은 ϵ에 대해 C와 C_ϵ이 영역 D의 경계가 되도록 D를 잘 정의하고 그린 정리를 올바르게 적용하면 5점 (영역 D를 그냥 C의 내부로 잡은 경우, 원점에서 $\mathbf{F}$가 정의되지 않기에 그린 정리를 쓸 수 없으므로 0점).
  - 답이 맞으면 5점.
- **(2)**와 같은 풀이를 시도한 경우
  - 곡선 C를 매개화하고 구하는 적분을 매개변수로 잘 나타내면 5점 (극좌표계 매개화 $X(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$는 표현하지 못하는 C가 존재하기에 0점).
  - 계산을 정당화하고 답이 맞으면 10점. 답만 맞으면 5점.
- **(3)**과 같은 풀이를 시도한 경우
  - $\mathbf{F}$의 잠재함수를 구하면 5점.
  - 선적분 기본정리를 올바르게 적용하면 5점.
  - 답이 맞으면 5점.
- 모범답안과 다른 풀이를 시도한 경우
  - 옳은 풀이이면 15점, 답만 맞으면 5점, 아니면 0점.

7. (20점) 좌표공간의 영역 $x^2+y^2+z^2 \le 4$ 와 곡면 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 공통부분을 S 라고 할 때, 곡면 S 의 넓이를 구하시오.

Solution

곡면 S 는

$$X(\theta,z)=(1+\cos\theta,\sin\theta,z),\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{2(1-\cos\theta)}\le z\le\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

로 매개화 할 수 있다. 여기서 z 의 범위는 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 로부터 얻어진다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\text{넓이} &= \iint_S 1\,dS \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{2(1-\cos\theta)}}^{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} |X_\theta\times X_z|\,dz\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\theta/2}\,d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta \\
&= 16.
\end{aligned}$$

채점기준

- 매개화를 잘 하고, 적분식을 올바르게 세운 경우 7점 (매개화의 방법은 다양할 수 있다).
- 나머지 풀이가 올바르면 13점.

8. (20점) 좌표공간의 곡면 S: $x^2+y^2-z^2=1$ $(0 \le z \le 1)$의 향을 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \le 0$이 되도록 정했을 때 다음과 같이 주어지는 벡터장 $\mathbf{F}$에 대하여 면적분 $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$를 구하시오.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, -y^2, z^2)$$

Solution

(1) 발산 정리를 활용한 풀이

다음과 같은 영역

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

을 생각하면, B의 경계는 세 곡면 S, $S_1 = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le 1\}$, $S_2 = \{(x,y,1) \mid x^2+y^2 \le 2\}$로 이루어진다. 그러면 발산 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV_3.$$

이때 S_1의 방향은 $\mathbf{n} = (0,0,-1)$이고, S_2의 방향은 $\mathbf{n} = (0,0,1)$이다. 한편 $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x - 2y + 2z$이고 B는 두 평면 $x=0$과 $y=0$에 모두 대칭이므로,

$$\iiint_B \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV_3 = \iiint_B 2x\, dV_3 - \iiint_B 2y\, dV_3 + \iiint_B 2z\, dV_3 = 0 - 0 + \int_0^1 2z\cdot(z^2+1)\pi\, dz = \frac{3}{2}\pi$$

이다. 다음으로, S_1에서는 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = z^2\cdot(-1) = 0$이고 S_2에서는 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = z^2\cdot 1 = 1$이므로,

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0, \qquad \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} 2\, dS = 2\pi$$

이다. 따라서 구하는 답은 다음과 같다.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV_3 - \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{3}{2}\pi - 0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 곡면을 매개화하여 직접 면적분을 계산한 풀이

S를 $X(z,\theta) = \left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, z\right)$ $(0 \le z \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$로 매개화하면,

$$X_z = \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\theta, \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin\theta, 1\right), \quad X_\theta = \left(-\sqrt{1+z^2}\sin\theta, \sqrt{1+z^2}\cos\theta, 0\right)$$

이므로

$$X_z \times X_\theta = \left(-\sqrt{1+z^2}\cos\theta, -\sqrt{1+z^2}\sin\theta, z\right)$$

이다. 이때 $(X_z \times X_\theta)\cdot\mathbf{k} = z \ge 0$이므로, 부호를 고려하면 구하는 면적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(X(z,\theta))\cdot(-X_z \times X_\theta)\, d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left((1+z^2)\cos^2\theta, -(1+z^2)\sin^2\theta, z^2\right)\cdot\left(\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\sin\theta, -z\right) d\theta dz.\end{aligned}$$

$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta = 0$이므로, 구하는 값은 $\int_0^1 \int_0^{2\pi} -z^3\, d\theta dz = -\frac{\pi}{2}$이다.

채점기준

다음 중에서 가장 많은 부분점수를 받을 수 있는 채점기준을 적용함.

- **(1)**과 같은 풀이를 시도한 경우
  - 영역 B를 잘 정의하고, 발산 정리를 올바르게 적용하면 8점.
  - $\iiint_B \mathrm{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V_3$을 맞게 계산하면 3점.
  - $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$를 맞게 계산하면 2점.
  - $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$를 맞게 계산하면 2점.
  - 답이 맞으면 5점.
- **(2)**와 같은 풀이를 시도한 경우
  - 곡면 S를 $X(u, v)$ 꼴로 올바르게 매개화하면 5점.
  - 매개화에 대한 법선벡터 $X_u \times X_v$를 맞게 계산하면 5점 (부호 틀리면 0점).
  - 면적분 식을 u, v로 맞게 나타내면 5점 (부호 틀리면 0점).
  - 답이 맞으면 5점.
- 모범답안과 다른 풀이를 시도한 경우
  - 옳은 풀이이면 20점, 답만 맞으면 5점, 아니면 0점.

9. (20점) 좌표공간에서 곡면 $S: x^2+y^2+z^2=4(z\geq 0)$ 에 대하여 면적분 $\iint_S z(xe^{yz}+ye^{xz}+z^3)\,\mathrm{d}S$ 을 구하시오.

Solution

(발산정리 사용) 곡면 S 에서 법선벡터를 $\mathbf{n}$ 이라고 두면, $\mathbf{n}(x,y,z)=\frac{1}{2}(x,y,z)$ 이다.
벡터장 $\mathbf{F}$ 를 $\mathbf{F}(x,y,z)=2z(e^{yz},e^{xz},z^2)$ 라고 정의하면,

$$\begin{aligned}
\iint_S z(xe^{yz}+ye^{xz}+z^3)\,\mathrm{d}S &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \\
&= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S && (S'\colon x^2+y^2=4,\ z=0) \\
&= \iiint_R \mathrm{div}(F)\,\mathrm{d}V && (R\colon x^2+y^2+z^2\leq 4,\ z\geq 0) \\
&= \iiint_R 6z^2\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 6\rho^4\cos^2\phi\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{192}{5}\cos^2\phi\sin\phi\,d\phi \\
&= \frac{128}{5}\pi.
\end{aligned}$$

세번째 등호에서 발산정리가 사용되었다.

채점기준

- 다음 중에서 가장 많은 부분점수를 받을 수 있는 채점기준을 적용함.
- 발산정리 사용
  - 발산정리를 올바르게 사용하여,
  $$\iint_S z(xe^{yz} + ye^{xz} + z^3)\,\mathrm{d}S = \iiint_R 6z^2\,\mathrm{d}V$$
  를 유도하면 7점.
  - 나머지 풀이가 올바르면 13점.
- 스토크스 정리(또는 적분의 대칭성) 사용
  - 스토크스 정리(또는 적분의 대칭성)를 사용하여,
  $$\iint_S z(xe^{yz} + ye^{xz} + z^3)\ dS = \iint_S z^4 dS$$
  를 유도하면 7점.
  - S_1과 S_2에서의 면적분을 구하는 식을 정확하게 쓰면 9점.
  - 답이 맞으면 4점.
- 그 외 풀이
  - 옳은 풀이이면 20점, 아니면 0점.

10. (20점) 좌표공간의 곡선 $C(t) = (\sec t, 0, t)$, $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$를 z축을 중심으로 회전시킨 회전면 S에 대하여 면적분 $\iint_S \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot d\mathbf{S}$를 구하시오. (단, 곡면 S의 향은 $z > 0$일 때 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$가 되도록 한다.)

Solution

(1) 입체각을 단위구면의 일부분의 넓이로 계산한 풀이

$\frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$는 입체각 벡터장이고, S의 방향은 원점으로부터 바깥을 향하므로, 구하는 면적분은 S의 입체각과 같다. S의 경계에서는 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$이고 $|z| = \frac{\pi}{4}$이므로, S의 입체각은 단위구면의 일부분인

$$S^2 \cap \left\{ (x,y,z) \mid -\frac{\pi/4}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}} \le z \le \frac{\pi/4}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}} \right\}$$

의 넓이와 같다. 교재 747쪽의 논의에 따라, 이 값은 $2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\pi/4}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}}$이다.

(참고) 원점에서 S의 경계가 S에 가리지 않고 '보인다'는 점을 추가로 증명해야 한다. 다시 말해, 단위구면의 일부분을 잡을 때 S의 '경계'의 정보를 쓰는 까닭을 서술해야 한다. 해당 사항은 채점하지 않았다.

(2) 닫힌 곡면의 입체각에서 계산하기 쉬운 면적분을 빼는 풀이

곡면 S에 다음과 같은 곡면

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2, z = \frac{\pi}{4} \right\}, \quad S_2 = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2, z = -\frac{\pi}{4} \right\}$$

을 이어붙인 닫힌 곡면을 T라 하자. 이때 S_1의 방향은 $\mathbf{n} = (0,0,1)$, S_2의 방향은 $\mathbf{n} = (0,0,-1)$로 준다. 그러면

$$\begin{aligned}
&\iint_T \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_S \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

이므로, 구하는 면적분은 T의 입체각인 4π에서 S_1과 S_2의 입체각의 합을 뺀 것이다. 한편 대칭성에 의해 S_1과 S_2의 입체각은 같고,

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \frac{\pi/4}{\sqrt{(x^2+y^2+(\pi/4)^2)^3}} dS \\
&= 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\pi/4}{(r^2+(\pi/4)^2)^{3/2}} r\,dr \\
&= 2\pi \cdot \left[-\frac{\pi}{4} \left(r^2 + (\pi/4)^2 \right)^{-1/2} \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\pi - \frac{\pi^2/2}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}}
\end{aligned}$$

이므로, 구하는 값은

$$4\pi - 2\left(2\pi - \frac{\pi^2/2}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}} \right) = \frac{\pi^2}{\sqrt{2+(\pi/4)^2}} = \frac{4\pi^2}{\sqrt{32+\pi^2}}$$

이다.

채점기준

다음 중에서 가장 많은 부분점수를 받을 수 있는 채점기준을 적용함.

- **(1)**과 같은 풀이를 시도한 경우
    - 구하는 답이 S의 입체각임을 밝히면 6점 (부호만 틀리면 6점).
    - 넓이를 구하는 단위구면의 일부분을 정확하게 밝히거나, 그 영역의 넓이를 구하는 식 또는 방법을 정확히 쓰면 9점.
    - 답이 맞으면 5점.
- **(2)**와 같은 풀이를 시도한 경우
    - 답이 T의 입체각(또는 4π)에서 S_1과 S_2에서의 면적분을 뺀 것임을 밝히면 6점 (부호만 틀리면 6점).
    - S_1과 S_2에서의 면적분을 구하는 식을 정확하게 쓰면 9점.
    - 답이 맞으면 5점.
- 모범답안과 다른 풀이를 시도한 경우 (예를 들어, 직접 면적분을 계산한 경우)
    - 옳은 풀이이면 20점, 답만 맞으면 5점, 아니면 0점.

11. (15점) 좌표공간의 곡면 $S : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ $(z \leq 0)$의 향을 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$이 되도록 정했을 때, 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = (y,\ -x,\ zx^3y^2)$에 대하여 면적분

$$\iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

을 구하시오.

Solution

∂S는 $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$로 매개화 된다. 스토크스 정리에 의해

$$\begin{aligned} \iint_S \mathrm{curl}\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin\theta, -\cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

채점기준

- 모범답안과 같은 풀이를 시도한 경우
  - 스토크스 정리를 적용하면 5점.
  - 향이 맞도록 ∂S를 매개화하면 5점.
  - 스토크스 정리를 적용하고 향이 맞도록 ∂S를 매개화한 경우 답이 맞으면 5점.
- 모범답안과 다른 풀이를 시도한 경우
  - 옳은 답이 논리적으로 도출되면 15점, 아니면 0점.