1. [**단답형**] (5점) 좌표공간에서 정의된 함수 $f(x,y,z)=\sin(xy+yz-zx)$와 점 $P(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi},0)$에 대하여, P에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향을 나타내는 단위벡터를 $\mathbf{v}$라 할 때, $D_{\mathbf{v}}f(P)$를 구하시오.

Solution

$\mathbf{v}$는 $\operatorname{grad} f(P)$와 나란한 단위벡터인 $\dfrac{\operatorname{grad} f(P)}{|\operatorname{grad} f(P)|}$이고, 이 때 $D_{\mathbf{v}}f(P)$의 값은

$$D_{\mathbf{v}}f(P)=\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} f(P)=\frac{\operatorname{grad} f(P)}{|\operatorname{grad} f(P)|}\cdot\operatorname{grad} f(P)=|\operatorname{grad} f(P)|$$

임을 이용하자.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\cos(xy+yz-zx)(y-z,x+z,y-x)$$

이므로, $P=(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi},0)$를 대입하면

$$\operatorname{grad} f(P)=(\sqrt{\pi},-\sqrt{\pi},2\sqrt{\pi})$$

를 얻는다. 따라서

$$D_{\mathbf{v}}f(P)=|\operatorname{grad} f(P)|=\sqrt{6\pi}.$$

채점기준

- 답이 맞으면 5점, 부분점수 없음.

2. [**단답형**] (10점) 함수 $F(x,y) = (x^3 - 3xy, y^2 + x^2y)$에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) (5점) 점 $(1,1)$ 근방에서 역함수를 G라 할 때, $G'(-2,2)$를 구하시오.

(b) (5점) 점 $Q(-2,2)$와 원판 $B_r(Q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+2)^2 + (y-2)^2 < r^2\}$에 대하여 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{r\to 0} \frac{\text{area}(G(B_r(Q)))}{\text{area}(B_r(Q))}$$

Solution

(a)

$$F(1,1) = (-2,2), \qquad F'(1,1) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y & -3x \\ 2xy & 2y + x^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

이고, 행렬 $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$의 행렬식은

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$$

이므로 가역행렬이다. 따라서 역함수 정리에 의해 F는 $(1,1)$ 근방에서 국소적으로 역함수 G를 가지며,

$$G'(-2,2) = F'(-1,1)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

을 얻는다.

(b) 야코비행렬식과 순간넓이팽창률의 관계에 의해

$$\lim_{r\to 0} \frac{\text{area}(G(B_r(Q)))}{\text{area}(B_r(Q))} = |\det G'(-2,2)|$$

임을 이용하자. 위 (a)에서 구한

$$G'(-2,2) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

를 이용하면 구하고자 넓이팽창률은

$$\left|\det\left(\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right)\right| = \frac{1}{6}$$

이다.

채점기준

- 답이 맞으면 각각 5점, 부분점수 없음.

3. (15점) 타원면 $(x-1)^2+2(y-2)^2+3(z-3)^2=1$ 위의 점 P에서의 접평면이 원점을 포함하게 되는 점 P들은 모두 하나의 평면에 들어있다. 이 평면의 방정식을 구하시오.

Solution

$f(x,y,z) := (x-1)^2+2(y-2)^2+3(z-3)^2$로 정의하면 주어진 타원면은 f의 1-등위면이다. P의 좌표를 (a,b,c)로 놓으면 P에서의 접평면은 P를 지나고 $\mathrm{grad}f(P)=(2(a-1),4(b-2),6(c-3))$에 수직이므로 방정식은 $2(a-1)x+4(b-2)y+6(c-3)z=2(a-1)a+4(b-2)b+6(c-3)c$와 같다. 이 평면이 원점을 지나므로 다음 관계식을 만족한다:

$$(a-1)a+2(b-2)b+3(c-3)c=0. \tag{1}$$

한편 P는 주어진 타원면 위의 점이므로 다음의 관계식도 만족한다:

$$(a-1)^2+2(b-2)^2+3(c-3)^2=1. \tag{2}$$

(1)에서 (2)를 뺀 후 정리하면 P는 항상 $(x-1)+4(y-2)+9(z-3)=-1$ 위에 있음을 알 수 있다.

채점기준

- $\mathrm{grad}f$을 잘 구하면 5점.
- 타원면의 점 P에서의 접평면을 잘 구하면 5점.
- P들이 이루는 평면을 잘 구하면 5점.

4. (15점) uv-평면에서 정의된 벡터함수 g와 xy-평면에서 정의된 함수 f에 대해 $g(u,v) = \left(u^3+v^2, u+2v\right)$, $f(g(u,v)) = \dfrac{u^2+v^2}{2}$가 성립한다고 하자. 점 $(x,y) = g(1,2)$에서 기울기 벡터 $\operatorname{grad} f$를 구하시오.

Solution

$g(u,v)$는 $(u,v) = (1,2)$ 근방에서 정의된 일급사상 $U \to \mathbb{R}^2$으로, g의 (u,v)에서의 야코비 행렬은

$$g'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(u^3+v^2\right) & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(u^3+v^2\right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(u+2v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u+2v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 2v \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이며, $g'(1,2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이다. 따라서 야코비 행렬식 $\det g'(1,2) = 2$ 가 0이 아니고, 역함수 정리에 의하여 g는 $(u,v) = (1,2)$ 근방에서 국소적으로 일급가역이며, $(x,y) = g(1,2)$ 근방 V에서 국소 역사상 $g^{-1} : V \to U$의 야코비 행렬은

$$\left(g^{-1}\right)'(x,y) = \left(g'(1,2)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

로 주어진다.

uv-평면에서 정의된 $(f \circ g)(u,v) = f(g(u,v)) = \dfrac{u^2+v^2}{2}$는 $\mathbb{R}^2$에서 정의된 일급함수 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$로 미분가능하다. $f \circ g$의 야코비 행렬은

$$(f \circ g)'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{u^2+v^2}{2}\right) & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{u^2+v^2}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$$

와 같고, $(u,v) = (1,2)$에서 야코비 행렬은 $(f \circ g)'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ 와 같이 주어진다.

$(x,y) = g(1,2)$ 근방에서 $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$이고, $(f \circ g)$가 $g^{-1}(x,y) = (1,2)$ 근방에서 미분가능, g^{-1}가 (x,y) 근방에서 미분가능하므로, 연쇄법칙에 의해 $(x,y) = g(1,2)$에서

$$f'(x,y) = (f \circ g)'(g^{-1}(x,y))\left(g^{-1}\right)'(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

와 같다. 야코비 행렬의 정의에 의하여 $(x,y) = g(1,2)$에서 $D_1 f(x,y) = 0, D_2 f(x,y) = 1$이고, 따라서 $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,1)$이다. (주. f의 미분가능성이 보장되지 않았기 때문에 연쇄법칙 적용 시 f를 $f \circ g$와 국소적 g^{-1}의 합성으로 간주하고 진행해야 합니다.)

채점기준

- $g(u,v)$의 $(u,v) = (1,2)$에서의 야코비 행렬을 올바르게 구했을 경우 성분별로 1점씩 총 4점 부여.
- 야코비 행렬의 행과 열을 바꿔 작성했을 경우 1점 감점.
- $\dfrac{u^2+v^2}{2}$ (즉 $f \circ g$)의 기울기 벡터를 올바르게 구했을 경우 성분별로 2점씩 총 4점 부여.
- 연쇄법칙을 올바르게 서술했을 경우 3점 부여.
- 연쇄법칙을 f와 g에 대해 사용했을 경우, 적용 조건으로 f가 미분가능함을 역함수 정리 등을 이용해 확인하지 않았다면 1점 감점.
- 연쇄법칙을 올바르게 적용하고 식을 풀어 f의 $(x,y) = g(1,2)$에서의 기울기 벡터를 맞게 구했을 경우 성분별로 2점씩 총 4점 부여.

5. (20점) 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 영벡터가 아닌 임의의 $\mathbf{v}$에 대해 $D_{\mathrm{v}}f(0,0)$가 존재하는지 판단하시오.

(b) (10점) 원점에서 함수 f의 미분가능성을 판단하시오.

Solution

(a) $\mathbf{v} = (a,b)$라고 놓자. $D_{\mathbf{v}}f(0,0) := \lim_{t\to 0} \dfrac{f(at,bt) - f(0,0)}{t} = \dfrac{a^2b}{a^2+ab+b^2}$이다. 따라서 영벡터가 아닌 임의의 $\mathbf{v}$에 대해 $D_{\mathrm{v}}f(0,0)$가 항상 존재한다.

(b) $D_{(1,0)}f(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 0$, $D_{(1,1)}f(0,0) = \dfrac{1}{3} \neq D_{(1,0)}f(0,0) + D_{(0,1)}f(0,0)$이므로 $D_{\mathrm{v}}f(0,0)$는 $\mathbf{v}$에 대해 선형이 아니다. 따라서 f는 원점에서 미분가능하지 않다.

채점기준

(a)
- 각 방향에서의 $D_{\mathrm{v}}f(0,0)$를 잘 구하면 10점.
- $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t\mathbf{v}) - f(0,0)}{t}$까지만 구하면 5점.

(b)
- 부분점수 없음.

6. (15점) 식

$$x^3 + y^3 + z^4 - 2xyz = 6$$

으로 주어진 곡면은 점 $P(2,1,1)$ 근방에서 어떤 함수 $x = f(y,z)$의 그래프로 나타낼 수 있음을 설명하고 점 (1,1)에서 이 함수 f의 기울기 벡터를 구하시오.

Solution

$g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^4 - 2xyz$으로 놓으면 주어진 곡면은 g의 6-등위면이다. 이 함수의 그래디언트는 $\mathrm{grad} f = (3x^2 - 2yz, 3y^2 - 2xz, 4z^3 - 2xy)$이므로 $\mathrm{grad} f(P) = (10, -1, 0)$ 다. 이 벡터의 x성분이 0이 아니므로 은함수 정리에 의해 주어진 곡면은 P 근방에서 어떤 함수 $x = f(y,z)$의 그래프로 나타낼 수 있다. 그리고 $\mathrm{grad} f(1,1) = -\frac{1}{10}(-1,0) = \left(\frac{1}{10}, 0\right)$이다.

채점기준

- $\frac{\partial g}{\partial x}(P) \neq 0$를 통해 주어진 곡면이 $x = f(y,z)$의 그래프로 나타남을 잘 보였으면 8점.
- 위의 과정 없이 "은함수 정리"만 언급한 경우는 3점.

- $\mathrm{grad} f(1,1) = \left(\frac{1}{10}, 0\right)$를 잘 구했으면 7점.
- 위 답을 구하지 못하고 $\mathrm{grad} f(1,1) = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}(P)}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(P), \frac{\partial g}{\partial z}(P)\right)$만 언급했으면 3점.

7. (15점) 좌표공간의 곡면 $xy + zy = 2\sqrt{2}$ 위의 점 중 원점과 가장 가까운 점을 구하시오.

Solution

곡면 $xy + zy = 2\sqrt{2}$는 공집합이 아님이 자명하므로, 교재 11장 6.3절과 같은 논의에 의해 주어진 곡면과 원점 사이의 최소거리가 존재함을 알 수 있다. 삼변수 함수 d와 g를

$$d(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2, \qquad g(x, y, z) := xy + yz$$

로 정의하면 문제는 g의 $2\sqrt{2}$-등위면 상에서 정의된 함수 d의 최소점을 찾는 문제와 같다. 한편

$$\operatorname{grad} g(x, y, z) = (y, x + z, y) = (0, 0, 0)$$

이기 위해서는

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

을 만족해야 하는데, 이는 g의 $2\sqrt{2}$-등위면 상에 존재하지 않는다. 그러면 라그랑주 승수법에 의해 $d(x, y, z)$를 g의 $2\sqrt{2}$-등위면에 제한했을 때의 극점 (x, y, z)은 어떤 실수 λ가 존재하여

$$\begin{cases} \operatorname{grad} d(x, y, z) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = \lambda(y, x + z, y) \\ xy + yz = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda y & \cdots \quad (1) \\ 2y = \lambda(x + z) & \cdots \quad (2) \\ 2z = \lambda y & \cdots \quad (3) \\ xy + yz = 2\sqrt{2} & \cdots \quad (4) \end{cases}$$

를 만족하는 점에서 갖는다. 식 (1)과 식 (3)의 양변을 더한 후 양변에 $\dfrac{\lambda}{2}$ 를 곱하면

$$\lambda(x + z) = \lambda^2 y \quad \cdots \quad (5)$$

를 얻고, 식 (2)와 식 (5)를 비교하면

$$2y = \lambda^2 y \quad \cdots \quad (6)$$

을 얻는다. 식 (4)로 부터 $y \neq 0$을 얻을 수 있으므로 식 (6)의 양변을 y으로 나누면

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

를 얻는다.

I. $\lambda = \sqrt{2}$인 경우:
식 (1)과 식 (3)에 의해 $x : y : z = 1 : \sqrt{2} : 1$ 을 얻고, 이를 식 (4)에 대입하면

$$(x, y, z) = \left(1, \sqrt{2}, 1\right) \qquad \text{또는} \qquad (x, y, z) = \left(-1, -\sqrt{2}, -1\right)$$

를 얻는다.

II. $\lambda = -\sqrt{2}$인 경우:
식 (1)과 식 (3)에 의해 $x : y : z = 1 : -\sqrt{2} : 1$ 을 얻고, 이를 식 (4)에 대입하면 좌변의 $xy+yz$의 값이 항상 양이 아닌 실수로 나오게 되어 우변의 $\sqrt{2}$와 같을 수 없다. 즉, 이 경우 위 연립방정식의 해는 존재하지 않는다.

한편

$$d\left(1, \sqrt{2}, 1\right) = d\left(-1, -\sqrt{2}, -1\right)$$

이므로 d의 최소점은

$$(x, y, z) = \left(1, \sqrt{2}, 1\right), \qquad (x, y, z) = \left(-1, -\sqrt{2}, -1\right)$$

으로 총 2개이다.

채점기준

- 최솟값이 존재함을 서술하는 것에 2점.
- 라그랑주 승수법에 의해 연립방정식을 세우기 전에 $\operatorname{grad} g(x, y, z) = (0, 0, 0)$을 만족하는 점이 g의 $2\sqrt{2}$-등위면 존재하지 않음을 서술하는 것에 2점 (혹은 $\operatorname{grad} f(x, y, z)$와 $\operatorname{grad} g(x, y, z)$가 일차종속이라고 서술해도 2점).
- 라그랑주 승수법에 의해 연립방정식을 세우는 것에 2점.
- 연립방정식을 풀어 최소점 2개를 모두 구하면 9점.
- 연립방정식을 푸는 과정에서 최소점을 한 개만 찾거나, 사소한 계산실수로 인해 답이 틀렸을 경우 5점.

- 라그랑주 승수법을 쓰지 않더라도 풀이 상의 오류없이 최소점을 잘 구했으면 15점.
- 라그랑주 승수법을 쓰지 않았으나, 풀이 상의 오류나 비약이 있다면 0점.

8. (20점) 함수 $f(x,y) = x^2y + e^{x\sin y} + \cos(xy)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) 영역 $R = \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ $ 점 $P(1,0)$에서 $\mathbf{v} = (a,b)$ 방향으로 함수 $z = f(x,y)$가 아래로 볼록$\big\}$을 그리시오.

(b) (10점) 점 $P(1,0)$에서 함수 $f(x,y)$의 2차 근사식을 구하고, 이를 이용하여 $f(1.1, 0.1)$의 근사값을 구하시오.

Solution

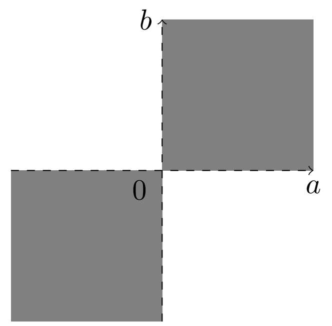
(a) 이급함수 f에 대하여 $D^2_{\mathbf{v}}f(P) > 0$이면 f가 점 P에서 $\mathbf{v}$방향으로 아래로 볼록함을 이용한다.

$$\begin{aligned}
D_1f(x,y) &= 2xy + \sin y e^{x\sin y} - y\sin(xy) \\
D_2f(x,y) &= x^2 + x\cos y e^{x\sin y} - x\sin(xy) \\
D_1^2f(x,y) &= 2y + \sin^2 y e^{x\sin y} - y^2\cos(xy) \\
D_2D_1f(x,y) &= 2x + \cos y e^{x\sin y} + x\sin y\cos y e^{x\sin y} - \sin(xy) - xy\cos(xy) \\
D_1D_2f(x,y) &= 2x + \cos y e^{x\sin y} + x\sin y\cos y e^{x\sin y} - \sin(xy) - xy\cos(xy) \\
D_2^2f(x,y) &= -x\sin y e^{x\sin y} + x^2\cos^2 y e^{x\sin y} - x^2\cos(xy)
\end{aligned}$$

이므로, f는 이급함수이고, $P = (1,0)$에서 $D_1^2f(P) = 0$, $D_1D_2f(P) = 3$, $D_2^2f(P) = 0$이다. 따라서 $\mathbf{v} = (a,b)$에 대하여

$$D^2_{\mathbf{v}}f(P) = a^2D_1^2f(P) + 2abD_1D_2f(P) + b^2D_2^2f(P) = 6ab$$

이고, $ab > 0$인 영역에서 $\mathbf{v}$ 방향으로 $z = f(x,y)$가 아래로 볼록이다.



(주. (국소적) 순볼록함수의 본래 정의 $f((1-t)X + tY) > (1-t)f(X) + tf(Y)$, $0 < t < 1$에 입각하여 풀 경우, $D^2_{\mathbf{v}}f(P) = 0$인 $\mathbf{v}$에 대해 새로 판정하여야 하나, 본 문제에서는 고려하지 않기로 한다.

만약 본래 정의대로 푼다면, $\mathbf{v} = (a,0)$ 에 대해선

$$f(P + t\mathbf{v}) = f(1 + at, 0) = 2$$

이므로 아래로 볼록이지만 순볼록함수가 아니며, $\mathbf{v} = (0,b)$ $(b \neq 0)$에 대해선

$$\begin{aligned}
f(P + t\mathbf{v}) = f(1, bt) &= bt + e^{\sin bt} + \cos(bt) \\
&= 2 + 2bt - \frac{b^4}{12}t^4 + o(t^4)
\end{aligned}$$

이므로 아래로 볼록하지 않고, 답은 여전히 $ab > 0$ 으로 도출된다.)

(b) 점 $P(1,0)$에서 함수 $f(x,y)$의 2차 근사다항식은 $\mathbf{v} = (x-1, y-0)$에 대하여

$$T_2 f(P,\mathbf{v}) = f(P) + D_{\mathbf{v}} f(P) + \frac{1}{2!} D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$$

이다. 이 때

$$f(P) = f(1,0) = 2$$

$$D_{\mathbf{v}} f(P) = D_1 f(P)(x-1) + D_2 f(P)(y-0) = 0(x-1) + 2(y-0) = 2y$$

$$D_{\mathbf{v}}^2 f(P) = (x-1)^2 D_1^2 f(P) + 2(x-1)(y-0) D_1 D_2 f(P) + (y-0)^2 D_2^2 f(P) = 6(x-1)y$$

이므로, 2차 근사다항식은

$$2 + 2y + 3(x-1)y = 2 - y + 3xy$$

와 같이 주어진다. 이를 이용하여 $f(1.1, 0.1)$의 근사값을 구하면

$$2 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 2.23$$

으로 구해진다.

(주. 본 문제에서는 오차항을 고려하지 않는다. 다만 $M_3 \sim 5$ 정도로 나머지항의 오차를 0.007 미만으로 특정 가능하고 참값 $2.231\ldots$를 잘 근사하는 결과를 얻는다.)

채점기준

(a)의 경우,

- f가 $\mathbf{v}$방향으로 아래로 볼록일 조건 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P) > 0$ (혹은 이와 동등한 조건)을 잘 서술하였을 경우 3점 부여.
- $\mathbf{v} = (a,b)$에 대하여 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$를 올바르게 구하였을 경우 4점 부여.
- 이계 편미분계수까지만 올바르게 구했을 경우 각 1점씩 최대 3점 부여. (즉, 이계미분계수의 ab에 해당하는 계수를 구할 때 $D_1 D_2 f(P)$에 2를 곱하지 않았을 경우 1점 감점. $\mathbf{v}$방향의 볼록성을 판단하기 위하여, 각 이계 편미분계수뿐 아니라 f가 이급임을 이용한 $D_{\mathbf{v}}^2 f(P)$의 표현까지 필요합니다.)
- f가 이급함수임을 확인하지 않았더라도 감점 없음.
- $ab > 0$ 영역을 올바르게 도시하였을 경우 3점 부여.
- 경계 포함 여부를 명시하지 않거나 경계 $ab = 0$ 을 포함하여 그렸더라도 감점 없음.

(b)의 경우,

- 2차 근사다항식을 작성하였을 경우, $(x-1, y)$에 대한 상수항 및 일차항 각 1점씩, 2차항 각 2점씩 총 9점 부여.
- 근사식을 $\mathbf{v}$ 혹은 (a,b)에 대한 식으로만 표현하거나, 근사식을 완전히 작성하지 않았을 경우 2점 감점. 단, 근사식의 인수를 $(1+a, b)$나 $(1+x, y)$로 하여 2차식을 옳게 표현한 경우는 제외한다.
- 근사식을 x, y에 대한 식으로 표현했지만 근사다항식을 $T_2 f(P, (x,y))$로 구했거나, 계수 계산 오류 이외의 이유로 도출한 식이 $f(x,y)$의 근사식이 아닌 경우 ($2 + 2y + 3xy$ 등) 2점 감점.
- $f(1.1, 0.1)$의 근사값을 올바르게 구했을 경우 1점 부여.

9. (15점) 영역 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 5\}$ 위에서 다음 함수의 최솟값을 구하시오.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

Solution

영역 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 5\}$는 유계이고 닫힌집합이며, f는 연속함수이므로 최대최소정리에 의해 영역 D에서 정의된 함수 f는 최댓값과 최솟값을 갖는다. $g(x,y) \coloneqq x^2+y^2$으로 정의하면 D의 내부에 해당하는

$$\operatorname{int} D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) < 5\}$$

는 열린집합이므로 임계점 정리에 의해 $\operatorname{int} D$에서 f의 극점은 임계점이다.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(4x^3 - 4(x-y),\, 4y^3 + 4(x-y)\big)$$

이므로 연립방정식

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

을 풀면 임계점은

$$(x,y) = (0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \tag{A}$$

이다.

이제 D의 경계

$$\partial D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 5\}$$

에서 정의된 함수 f의 극점의 후보들을 구해보자. 먼저

$$\operatorname{grad} g = (2x, 2y) = (0,0)$$

이기 위해서는 $(x,y) = (0,0)$이어야 하는데, 이는 g의 5-등위면 상에 존재하지 않는다. 그러면 라그랑주 승수법에 의해 $f(x,y)$를 ∂D에 제한했을 때의 극점 (x,y,z)는 어떤 실수 λ가 존재하여

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \\ g(x,y) = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \big(4x^3 - 4(x-y),\, 4y^3 + 4(x-y)\big) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 2\lambda x & \cdots \quad (1) \\ 4y^3 + 4(x-y) = 2\lambda y & \cdots \quad (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots \quad (3) \end{cases}$$

를 만족하는 점에서 갖는다. 식 (1)과 식 (2)를 더한 후 양변을 인수분해하면

$$4(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2\lambda(x+y) \quad \cdots \quad (4)$$

를 얻는다. (4)를 통해 케이스를 분류하면

I. $x+y=0$ 인 경우:
이 경우 식 (3)에 의해

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\qquad \text{또는}\qquad \left(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \tag{B}$$

II. $\lambda=2(x^2-xy+y^2)$ 인 경우:
이 경우 $\lambda=2(x^2-xy+y^2)$ 을 식 (1)에 대입하면

$$4x^3-4x+4y=4x(x^2-xy+y^2)\quad\cdots\quad(5)$$

를 얻고, 식 (5)를 이항 수 인수분해하면

$$4(x-y)(xy-1)=0\quad\cdots\quad(6)$$

을 얻는다. 식 (6)을 통해 다시 케이스를 분류하면

II-(i). $x-y=0$ 인 경우
이 경우 식 (3)에 의해

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\qquad \text{또는}\qquad \left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \tag{C}$$

을 얻는다.

II-(ii). $xy-1=0$ 인 경우
이 경우 식 (3)에 의해 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=1 \end{cases}\quad\cdots\quad(7)$$

을 풀어 (x,y)의 값을 구할 수 있지만 값이 복잡하게 나오므로 (7)을 만족하는 점 (x_0,y_0)에 대해 (총 4개의 가능한 (x_0,y_0) 순서쌍이 있음) $f(x_0,y_0)$의 값을 바로 구하면

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0)&=x_0^4+y_0^4-2(x_0-y_0)^2\\ &=(x_0^2+y_0^2)^2-2(x_0^2+y_0^2)-2x_0^2y_0^2+4x_0y_0\\ &=25-10-2+4\\ &=17 \end{aligned}$$

을 얻는다.

위 결과들을 종합하면, 영역 D에서 극점이 될 수 있는 후보는 (A), (B), (C)에서 구한

$$\begin{aligned}(x,y)=\,&(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),\\ &\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\end{aligned}$$

와 연립방정식 (7)을 풀어 나온 4개의 (x_0,y_0)들이고, 각각의 경우에 함숫값은

$$f(0,0)=15,\qquad f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-8,\qquad f\left(\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=-\frac{15}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{25}{2}, \qquad f(x_0, y_0) = 17$$

이다. 따라서 영역 D에서 정의된 함수 f의 최솟값은 -8이다.

별해) $\partial D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$ 위의 점 (x,y)에서는 산술기하 부등식에 의해

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \\ &= (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) - 2x^2y^2 + 4xy \\ &= -2(xy-1)^2 + 17 \\ &\geq -2\left(-\frac{x^2+y^2}{2} - 1\right)^2 + 17 \\ &= -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

를 얻는다. 이는 $\operatorname{int} D$에 위치해있는 점 $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$에서의 함숫값 -8보다 크므로, D에서 f의 최솟값만 구하는 이 문제에 대해서는 ∂D에서의 극점을 라그랑주 승수법을 통해 힘들게 조사할 필요는 없다.

채점기준

- 위 풀이와 같이 D를 $\operatorname{int} D$와 ∂D로 나누어 푼 경우
  - (a) 최솟값의 존재성을 보장했을 경우 1점.
  - (b) $\operatorname{int} D$ 에서 f의 임계점 구하는 것에 임계점 하나 당 1점, 총 3점.
  - (c) 라그랑주 승수법을 이용하여 경계에서의 극점이 될 수 있는 점들을 잘 구하면 10점.
    - i. $\operatorname{grad} g = (0,0)$을 만족하는 점을 배제하는 것에 (혹은 $\operatorname{grad} f(x,y)$와 $\operatorname{grad} g(x,y)$가 일차종속이라고 서술하는 것에) 1점.
    - ii. $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$를 이용하여 연립방정식을 세우는 것에 1점.
    - iii. 연립방정식을 풀어 나오는 해는 $(x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right), \quad \pm\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right),$ 연립방정식 (7) 의 해 4개로 총 8개인데, 이 극점의 후보들 중 하나를 구할 때마다 1점.
    - iv. 라그랑주 승수법을 사용하지 않더라도, 산술기하 부등식을 이용하여 ∂D에서 최솟값이 존재할 가능성을 잘 배제하면 10점.
  - (d) 답 점수 1점 (경계에서 최솟값이 나올 가능성을 배제하지 않은 상태에서는 답이 맞아도 답 점수 없음).

- 영역 D를 등위면 $x^2 + y^2 = r^2 \quad (0 \leq r \leq 5)$의 합집합으로 보고 라그랑주 승수법으로 푼 경우
  - (a) 최솟값의 존재성 보장에 1점.
  - (b) $r = 0$인 경우를 제외하면 (이 경우는 함숫값이 0), $\operatorname{grad} g = (0,0)$을 만족하는 점이 없음을 명시하는 것에 (혹은 $\operatorname{grad} f(x,y)$와 $\operatorname{grad} g(x,y)$가 일차종속이라고 서술하는 것에) 1점.

(c) $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$를 이용하여 연립방정식

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \\ g(x,y) = r^2 \end{cases}$$

세우는 것에 1점.

위 연립방정식을 풀면 해가 네 가지 경우 $x = y,\ x = -y,\ xy = 1,\ \lambda = 0$이 나오는데,

(d) $x = y$인 경우, $(x,y) = \pm\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$가 나오는데, 이 경우

$$f\left(\pm\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{r^4}{2} \geq 0$$

을 밝히는 것에 2점.

(e) $x = -y$인 경우, $(x,y) = \pm\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$가 나오는데, 이 경우

$$f\left(\pm\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{r^4}{2} - 4r^2 = \frac{1}{2}(r^2-4)^2 - 8$$

를 얻고, $r = 2$인 경우에 최솟값 -8을 가지는 것을 밝히는 것에 6점.

(f) $xy = 1$인 경우,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \\ &= (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) - 2x^2y^2 + 4xy \\ &= 17 \end{aligned}$$

임을 밝히는 것에 4점.

(g) $\lambda = 0$ 인 경우, 위 연립방정식을 풀면

$$(x,y) = (0,0), \qquad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

를 얻는다. 이 경우는 $x = -y$인 경우에 포함되기 때문에 $x = -y$인 경우에서 6점을 전부 받았다면 $\lambda = 0$인 경우에는 따로 점수가 없고, 만약 $x = -y$인 경우에서 점수를 받지 못했다면 이 경우에서 2점 부여.

- 위 풀이 외에도 타당한 방법으로 오류없이 답을 잘 도출할 경우 15점.
- 단순한 계산실수가 있지만, 올바른 풀이과정으로 답을 잘 도출한 경우 2점 이내로 감점.

10. (20점)

(a) (10점) 영역 $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$ 안에서 $P(1, \sqrt{3})$에서 출발하여 $Q(3,4)$에 도착하는 일급곡선 $X : [0,1] \to R$에 대해 선적분 $\int_X \frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오. (힌트: 일급 함수 r, θ에 대해 $X(t) = r(t)\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$로 매개화한다.)

(b) (10점) 3 이상의 자연수 n에 대하여 $\mathbb{R}^n - \{O\}$에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}(X) = \frac{X}{|X|^5}$을 생각하자. 원점을 지나지 않는 닫힌 곡선 C에 대하여, 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

Solution

(a) 영역 R에서 $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$와 $\theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$은 잘 정의된 일급함수이므로, $t \in [0,1]$ 위에서 $r(t) = r(X(t))$와 $\theta(t) = \theta(X(t))$ 역시 일급함수이고, $X(t) = (x(t), y(t))$라 하면

$$r(t)\cos\theta(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\cos\arctan\frac{y(t)}{x(t)} = x(t)$$
$$r(t)\sin\theta(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\sin\arctan\frac{y(t)}{x(t)} = y(t)$$

가 성립한다. 따라서 일급함수 $r(t), \theta(t)$에 대해 $X(t) = r(t)\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$로 표현 가능하며, 이 때 $r(t) > 0$, $0 < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$가 성립한다.

위 매개화에 대하여

$$X'(t) = (r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\theta'(t)\sin\theta(t), r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\theta'(t)\cos\theta(t))$$

가 성립하고, 따라서

$$\begin{aligned}
&\int_X \frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot d\mathbf{s} \\
&= \int_0^1 \frac{r(t)\sin\theta(t)}{r(t)\cos\theta(t)}\left(-\frac{r(t)\sin\theta(t)}{r(t)^2}, \frac{r(t)\cos\theta(t)}{r(t)^2}\right) \cdot X'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\tan\theta(t)}{r(t)}\,(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)) \\
&\quad \cdot \big(r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\theta'(t)\sin\theta(t), r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\theta'(t)\cos\theta(t)\big)\,dt \\
&= \int_0^1 \tan\theta(t)\theta'(t)\,dt = \int_{\theta(0)}^{\theta(1)} \tan\theta\,d\theta = [\log|\sec(\theta)|]_{\theta(0)}^{\theta(1)}
\end{aligned}$$

이 때

$$\sec\theta(0) = \sec\theta(X(0)) = \sec\theta(P) = \frac{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}{1} = 2$$
$$\sec\theta(1) = \sec\theta(X(1)) = \sec\theta(Q) = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{3} = \frac{5}{3}$$

이므로,

$$\int_X \frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot d\mathbf{s} = \log\left|\frac{5}{3}\right| - \log|2| = \log\frac{5}{6}$$

이다.

별해. $\phi(x,y) = \log\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \log x$는 영역 R 위에서 잘 정의된 함수 $R \to \mathbb{R}$이고, $(x,y) \in R$에 대해

$$D_1\phi(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} = \frac{y}{x} \cdot -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$D_2\phi(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

이므로, (ϕ는 일급함수이며,) 선적분 기본정리에 의하여

$$\int_X \frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot d\mathbf{s} = \int_X \operatorname{grad}\phi\cdot d\mathbf{s} = \phi(X(1)) - \phi(X(0))$$

이고, $\phi(X(1)) = \phi(Q) = \phi(3,4) = \log\frac{5}{3}$, $\phi(X(0)) = \phi(P) = \phi(1,\sqrt{3}) = \log 2$ 이므로, 위 적분값은 $\log\frac{5}{3} - \log 2 = \log\frac{5}{6}$ 이다.

(b) $\mathbb{R}^n - \{O\}$ 에서 정의된 함수 $\phi(X) = -\frac{1}{3}\frac{1}{|X|^3}$에 대하여,

$$D_k\phi(X) = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^n x_k^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(2x_k)\left(\sum_{i=1}^n x_k^2\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{x_k}{|X|^5}$$

가 각 $1\le k\le n$에 대하여 성립하므로, $\operatorname{grad}\phi = \mathbf{F}$이다. 따라서, $\mathbf{F}$는 $\mathbb{R}^n - \{O\}$에서 잠재함수를 가지고, 닫힌 곡선을 따라 $\mathbf{F}$를 적분한 값은 영이다. 그러므로 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$이다.

(주. $\mathbb{R}^n - \{O\}$는 볼록집합도, 별꼴 영역도 아니므로, 13장의 정리 3.5.3 (푸앵카레 도움정리)나 5절 부록의 증명을 그대로 사용하기 어렵습니다.)

채점기준

(a)에 대하여, (r,θ)로 매개화하여 풀이하였을 경우,

- $X(t)$를 일급 함수 r,θ에 대해 $X(t) = r(t)\,(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$로 매개화할 수 있음을 극좌표 변환의 성질 ($\sqrt{x^2+y^2}$과 $\arctan\frac{y}{x}$가 $x,y>0$에서 일급인 성질) 등을 이용하여 보였을 경우 1점 부여.
- 혹은, (푸앵카레 도움정리 등의 방법으로) 적분하려는 벡터장의 잠재함수가 존재함을 보인 뒤, 보존장의 성질을 이용하여 시작점과 끝점이 동일하고 특정 일급함수 $r(t), \theta(t)$에 대해 위와 같이 매개화가 가능한 경로를 만들었을 경우에도 동일하게 1점 부여.
- 선적분하려는 벡터장을 r,θ에 대해 옳게 표현했을 경우 3점 부여.
- 해당 계산에서 사소한 계산 실수 발생 시 1점 감점.
- $X'(t)$를 r,θ에 대해 옳게 표현했을 경우 3점 부여.
- 해당 계산에서 사소한 계산 실수 발생 시 1점 감점.
- 선적분을 올바르게 계산하였을 경우 3점 부여. 부분점수 없음.

선적분하려는 벡터장의 잠재함수를 구하여 선적분 기본정리를 사용하였을 경우,

- 잠재함수를 올바르게 구하였을 경우 6점 부여. 부분점수 없음.
- 선적분 기본정리를 언급하였을 경우 1점 부여.
- 선적분을 올바르게 계산하였을 경우 3점 부여. 부분점수 없음.

(b)에 대하여, 아래 방법들로 $\mathbf{F}$의 잠재함수의 존재성을 보였을 경우 총 6점 부여.

잠재함수를 직접 구하였을 경우,

- $\mathbf{F}$의 잠재함수를 직접 올바르게 구하였을 경우 6점 부여. 부분점수 없음.

잠재함수를 직접 구하지 않았지만 잠재함수가 존재함을 푸앵카레 도움정리를 이용하여 보였을 경우,

- 닫힌 벡터장임을 보였을 경우에 5점 부여.
- 닫힌 벡터장임을 설명하였으나 이를 보이기 위해 $D_i f_j$들을 명확하게 계산하지 않았을 경우 1점 감점.
- 단순연결된 영역이 무엇인지 설명한 후 $\mathbb{R}^n - \{O\}$가 $n \geq 3$에 대하여 단순연결된 영역임을 적합한 방식으로 설명하고, 단순연결된 영역에 대한 푸앵카레 도움정리를 적용했을 경우 1점 부여.
- 혹은, C의 점들을 모두 포함하면서 원점을 포함하지 않는 별꼴 영역의 존재성을 설명한 뒤 별꼴 영역에 대한 푸앵카레 도움정리를 적용했을 경우에도 동일하게 1점 부여. (별꼴 영역을 볼록집합으로 바꿀 경우, 이 설명은 성립하지 않습니다. 그 예로 $n = 3$에서 $C(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$의 닫힌 곡선을 고려하면, 볼록집합의 정의 상 $C(0)$과 $C(\pi)$를 포함하는 볼록집합은 두 점을 이은 선분의 모든 점들을 포함하므로, 특히 중점인 원점 O를 포함해야 합니다.)

위 방법들로 잠재함수의 존재성을 보인 후,

- 선적분 기본정리를 언급하였을 경우 1점 부여.
- 선적분을 올바르게 계산하였을 경우 3점 부여. 부분점수 없음.