

강좌번호:

학번:

이름:

단답형 문제는 답만, 나머지 문제는 답과 그 풀이과정을 해당 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓸 것. (총점 150점)

문제 1. [단답형] (5점) 좌표공간에서 정의된 함수 $f(x, y, z) = \sin(xy + yz - zx)$ 와 점 $P(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, 0)$ 에 대하여, P 에서 함숫값이 가장 빨리 증가하는 방향을 나타내는 단위벡터를 \mathbf{v} 라 할 때, $D_{\mathbf{v}}f(P)$ 를 구하시오.

문제 2. [단답형] (10점) 함수 $F(x, y) = (x^3 - 3xy, y^2 + x^2y)$ 에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) (5점) 점 $(1, 1)$ 근방에서 역함수를 G 라 할 때 $G'(-2, 2)$ 를 구하시오.

(b) (5점) 점 $Q(-2, 2)$ 와 원판 $B_r(Q) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y)^2 + (y - 2)^2 < r^2\}$ 에 대하여 다음 극한을 구하시오.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(G(B_r(Q)))}{\text{area}(B_r(Q))}$$

1	2 (a)	2 (b)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 3. (15점) 타원면 $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 3(z-3)^2 = 1$ 위의 점 P 에서의 접평면이 원점을 포함하게 되는 점 P 들은 모두 하나의 평면에 들어있다. 이 평면의 방정식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 4. (15점) uv -평면에서 정의된 벡터함수 g 와 xy -평면에서 정의된 함수 f 에 대해 $g(u, v) = (u^3 + v^2, u + 2v)$, $f(g(u, v)) = \frac{u^2 + v^2}{2}$ 가 성립한다고 하자. 점 $(x, y) = g(1, 2)$ 에서 기울기 벡터 $\text{grad}f$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 5. (20점) 좌표평면에서 정의된 함수

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 영벡터가 아닌 임의의 \mathbf{v} 에 대해 $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ 가 존재하는지 판단하시오.
- (b) (10점) 원점에서 함수 f 의 미분가능성을 판단하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 6. (15점) 식

$$x^3 + y^3 + z^4 - 2xyz = 6$$

으로 주어진 곡면은 점 $P(2, 1, 1)$ 근방에서 어떤 함수 $x = f(y, z)$ 의 그래프로 나타낼 수 있음을 설명하고, 점 $(1, 1)$ 에서 이 함수 f 의 기울기 벡터를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 7. (15점) 좌표공간의 곡면 $xy + zy = 2\sqrt{2}$ 위의 점 중 원점과 가장 가까운 점을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 8. (20점) 함수 $f(x, y) = x^2y + e^{x \sin y} + \cos(xy)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) 영역 $R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \text{점 } P(1, 0) \text{에서 } \mathbf{v} = (a, b) \text{ 방향으로 함수 } z = f(x, y) \text{가 아래로 볼록}\}$ 을 그리시오.
- (b) (10점) 점 $P(1, 0)$ 에서 함수 $f(x, y)$ 의 2차 근사식을 구하고, 이를 이용하여 $f(1.1, 0.1)$ 의 근사값을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 9. (15점) 영역 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$ 위에서 다음 함수의 최솟값을 구하시오.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 10. (20점)

- (a) (10점) 영역 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ 안에서 $P(1, \sqrt{3})$ 에서 출발하여 $Q(3, 4)$ 에 도착하는 일급곡선 $X : [0, 1] \rightarrow R$ 에 대해 선적분 $\int_X \frac{y}{x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오. (힌트: 일급 함수 r, θ 에 대해 $X(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ 로 매개화한다.)
- (b) (10점) 3 이상의 자연수 n 에 대하여 $\mathbb{R}^n - \{O\}$ 에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}(X) = \frac{X}{|X|^5}$ 을 생각하자. 원점을 지나지 않는 닫힌 곡선 C 에 대하여, 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

(풀이)