1. (10점) $\mathbb{R}^3$의 세 벡터

$$\mathbf{a} = (1, 2, 2), \qquad \mathbf{b} = (-1, k, 6), \qquad \mathbf{c} = (0, 1, k)$$

가 일차종속이 되게 하는 k를 모두 구하시오.

Solution

세 벡터가 일차종속이 되는 필요충분조건은

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ 2 & 6 & k \end{pmatrix} = k^2 + 2k - 8 = (k+4)(k-2)$$

이므로 구하는 k는 -4, 2 이다.

2. (15점) $\mathbb{R}^3$의 곡선 $X(t) = (\cosh t, \sinh t, e^t)$ $(-\infty < t < \infty)$ 위의 점 $(1, 0, 1)$에서 접촉평면을 구하시오.

Solution

곡선 $X(t)$의 속도 벡터, 가속도 벡터와 둘의 벡터곱은 다음과 같다.

$$X'(t) = (\sinh(t), \cosh(t), e^t)$$
$$X''(t) = (\cosh(t), \sinh(t), e^t)$$
$$X'(t) \times X''(t) = (e^t(\cosh(t) - \sinh(t)), e^t(\cosh(t) - \sinh(t)), -1).$$

접촉평면의 식 $(P - X(t)) \cdot (X'(t) \times X''(t)) = 0$에 $t = 0$을 대입하면 $x + y - z = 0$을 얻는다.

3. (25점) $\mathbb{R}^3$의 세 점 $A=(0,1,1)$, $B=(1,0,1)$, $C=(a,b,c)$와 원점 $O=(0,0,0)$에 대하여 주어진 세 벡터 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$는 다음 세 조건을 만족한다. (1) $|\mathbf{c}|=\sqrt{2}$, (2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=1$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=1$, (3) $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})>0$. 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $\triangle ABC$는 정삼각형임을 보이고, 그 넓이를 구하시오.

(b) (10점) 원점 O에서 '세 점 A, B, C를 지나는 평면'까지의 거리를 구하시오.

(c) (5점) $(\mathbf{a}\times 2\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}+4\mathbf{b}+5\mathbf{c})$를 구하시오.

Solution

(a) 문제의 조건 (1), (2)는 $1=b+c=a+c=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$이고 이를 풀면 $(1,1,0)$, $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$를 해로 얻는다. 조건 (3)을 만족하는 해는 $(1,1,0)$이고 $\triangle ABC$의 세 변의 길이는 $\sqrt{2}$로 정삼각형이 되며, 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

(b) 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 $x+y+z=2$이고, 원점 O에서 내린 수선의 발은 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$이다. 따라서 거리는 $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$이다.

(c) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$이고 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=2$이다. 따라서 $(\mathbf{a}\times 2\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a}+4\mathbf{b}+5\mathbf{c})=10(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=20$이다.

채점기준

- (a)에서 $\mathbf{c}$의 후보를 구하면 3점, $\mathbf{c}$를 올바르게 구하면 3점, 정삼각형임을 보이면 2점, 넓이를 구하면 2점
- (a)에서 선분 AB, AC, BC의 길이를 구해 바로 정삼각형임을 보이면 8점, 넓이를 구하면 2점

- (b)에서 평면을 구하면 4점, 수선의 발을 구하면 4점, 거리를 구하면 2점
- (b)에서 기하학적으로 거리를 올바르게 구한 경우 10점

4. (30점) 차수가 2 이하인 다항함수들의 벡터공간을 V라고 하자. 변환 $L : V \to V$과 $T : V \to \mathbb{R}^3$를 다음과 같이 정의하자.

$$L(p(x)) = p'(x) + 2p(x), \qquad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2)$$

(a) (5점) 변환 L이 선형임을 보이시오.

(b) (10점) 선형변환 $S = T \circ L \circ T^{-1}$의 행렬표현 A를 구하시오.

(c) (5점) A의 행렬식을 이용하여 S가 전단사함수임을 보이시오.

(d) (10점) A의 역행렬을 구하고, 이를 이용하여 $p'(x) + 2p(x) = x^2$인 2차 이하의 다항함수 $p(x)$를 구하시오.

Solution

(a) 2차 이하 다항함수 $p(x)$, $q(x)$와 상수 c에 대해

$$\begin{aligned} L(p(x) + q(x)) &= (p(x) + q(x))' + 2(p(x) + q(x)) = p'(x) + 2p(x) + q'(x) + 2q(x) \\ &= L(p(x)) + L(q(x)), \\ L(cp(x)) &= (cp(x))' + 2cp(x) = cp'(x) + 2cp(x) \\ &= cL(p(x)) \end{aligned}$$

이므로 변환 L은 선형이다.

(b) $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$에 대하여

$$\begin{aligned} S(a_0, a_1, a_2) &= T \circ L \circ T^{-1}(a_0, a_1, a_2) \\ &= T \circ L(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &= T((a_1 + 2a_2x) + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2)) \\ &= (2a_0 + a_1, 2a_1 + 2a_2, 2a_2) \end{aligned}$$

이므로 S의 행렬표현은

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) A의 행렬식은 $8 \neq 0$이므로 역행렬이 존재하며, A에 대응하는 함수 S도 역함수가 존재하여 전단사함수가 된다.

(d) (c)에서 역행렬이 존재함을 보였으므로 역행렬을

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

라 하자. 이 때 $AA^{-1} = I$의 첫번째 열을 비교하면

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{21} \\ 2a_{21} + 2a_{31} \\ 2a_{31} \end{pmatrix}$$

이므로 순서대로 $a_{31}=0$, $a_{21}=0$, $a_{11}=\dfrac{1}{2}$을 얻는다. 다음으로 두번째 열을 비교하면

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_{12}+a_{22}\\2a_{22}+2a_{32}\\2a_{32}\end{pmatrix}$$

이므로 순서대로 $a_{32}=0$, $a_{22}=\dfrac{1}{2}$, $a_{12}=-\dfrac{1}{4}$을 얻는다. 다음으로 세번째 열을 비교하면

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_{13}+a_{23}\\2a_{23}+2a_{33}\\2a_{33}\end{pmatrix}$$

이므로 순서대로 $a_{33}=\dfrac{1}{2}$, $a_{23}=-\dfrac{1}{2}$, $a_{13}=\dfrac{1}{4}$을 얻는다. 따라서 A의 역행렬은

$$A=\begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 1/4\\0 & 1/2 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

로 유일하게 존재한다. 따라서 $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$에 대해 $p'(x)+2p(x)=x^2$를 만족하면

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/4 & 1/4\\0 & 1/2 & -1/2\\0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

이므로

$$p(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$$

채점기준

- (a)에서 $L(p(x)+q(x))=L(p(x))+L(q(x))$와 $L(cp(x))=cL(p(x))$ 중 한 경우만 보인 경우 2점
- 변환 L이 잘 정의되어 있는지(즉, $L(p(x))\in V$인지) 확인하지 않아도 감점 없음

- (b)에서 $S(a_0,a_1,a_2)$를 잘 계산하면 4점, 행렬 표현에 6점
- 행렬 표현에서 행과 열을 바꾸어 구한 경우(즉, A^t를 구한 경우) 3점 감점
- T가 가역인지 확인하지 않아도 감점 없음

- (c)에서 A의 행렬식이 0이 아님을 보이면 2점, 이로 인해 S가 전단사함수가 아님을 보이면 3점
- 단순히 '$\det A\neq 0$이므로 S는 전단사함수가 된다'고 서술한 경우 점수를 부여하지 않음(즉, $\det A\neq 0$이면 S가 전단사함수인 이유가 있어야함)
- 행렬 A를 잘못 구한 경우 점수를 부여하지 않음

- (d)에서 A의 역행렬에 5점, 역행렬을 이용하여 $p(x)$ 구하면 5점
- 역행렬을 구하는 과정이 불명확한 경우 3점 감점
- A의 역행렬을 이용하지 않고 $p(x)$를 구할 경우 점수를 부여하지 않음

5. (20점) $\mathbb{R}^3$의 점 $P(t) = (t, t^2, 0)$ $(-\infty < t < \infty)$에서 구면 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$의 중심을 향하여 빛을 쏘았을 때 구면에 맺히는 상 중 $P(t)$에 가까운 점을 $X(t)$라고 하자. 곡선 $X(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ 위의 점 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \sqrt{3} - 1)$에서 접선의 방정식을 구하시오.

Solution

구면의 중심과 $P(t)$를 지나는 직선을 ℓ_t라고 하자. ℓ_t의 방향벡터는 $(t, t^2, -1)$이고 $(0, 0, 1)$을 지나므로 직선의 방정식은 $\ell_t(s) = (t, t^2, -1)s + (0, 0, 1)$이다.
직선 $\ell_t(s)$와 구면의 교점은 구면의 맺히는 상이므로, 교점 s는 $\pm\frac{1}{\sqrt{t^2+t^4+1}}(t, t^2, -1) + (0, 0, 1)$이다.
교점 s가 양수일 때 $P(t)$에 더 가까우므로, $X(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+t^4+1}}(t, t^2, -1) + (0, 0, 1)$이다.
$X(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \sqrt{3} - 1)$이므로 구하고자 하는 접선의 방정식은 $X'(1)t + X(1)$이다.
$X'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+t^4+1}}(1, 2t, 0) - \frac{2t+4t^3}{2(t^2+t^4+1)^{\frac{3}{2}}}(t, t^2, -1)$이므로 $X'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1)$이다.
따라서 접선의 방정식은 $x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ y - z = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$이다.

채점기준

- 직선의 방정식을 제대로 구하면 5점
- $X(t)$를 제대로 구하면 5점
- $X'(t)$와 $X'(1)$ 모두 제대로 구하면 5점
- 접선의 방정식을 제대로 구하면 5점
- $X'(1)t + X(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, t+1, t+\sqrt{3}-1)$라고 써도 5점

6. (20점) 극좌표로 표현된 곡선

$$X(t) = (r(t), \theta(t)), \qquad r(t) = \cos t, \qquad \theta = \sin t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(a) (10점) $t = 0$에서 속도벡터와 가속도벡터를 극좌표로 구하시오.

(b) (10점) 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

Solution

(a) $\mathbf{e}(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathbf{e}^*(\theta) := (-\sin\theta, \cos\theta)$로 두면 다음이 성립한다(교재 p.338 참고):

$$X' = r'\mathbf{e} + r\theta'\mathbf{e}^*,$$
$$X'' = (r'' - r\theta'^2)\mathbf{e} + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{e}^*.$$

여기에 주어진 $r(t) = \cos t$, $\theta = \sin t$를 대입하면 다음을 얻는다:

$$X'(t) = (-\sin t)\mathbf{e} + (\cos^2 t)\mathbf{e}^*,$$
$$X''(t) = -\cos t(1 + \cos^2 t)\mathbf{e} - (3\cos t \sin t)\mathbf{e}^*.$$

여기에 주어진 $t = 0$을 대입하면 다음을 얻는다:

$$X'(0) = \mathbf{e}^* = (0, 1),$$
$$X''(0) = -2\mathbf{e} = (2, 0).$$

이를 다시 극좌표로 바꾸면 $X'(0) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $X''(0) = (2, \pi)$이다.

(b) $r = \sqrt{1-\theta^2}$ $(-1 \le \theta \le 1)$이므로 구하고자 하는 넓이는 $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-\theta^2)d\theta = \frac{2}{3}$이다.

채점기준

- (a)에서 극좌표계로 표현된 값을 잘 구했으면 속도, 가속도 각 5점. 직교좌표계만 표현했으면 각 3점.
- (a)에서 X', X''의 극좌표계 표현은 (r', θ'), (r'', θ'')가 아니므로 이를 통해 답을 구한 것은 숫자가 맞더라도 점수를 부여하지 않음.
- (a)에서 $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}^*$의 계수를 모은 것은 극좌표계 표현이 아님.
- (b)에서 계산만 하면 되는 적분식을 잘 구했으면 5점. 답을 잘 구했으면 5점.

7. (20점) 좌표평면 위의 곡선

$$y^2 - x^2 + y - 2x = e^{y-x}, \qquad y - x > \frac{1}{2}$$

를 매개변수 $t = y - x$로 매개화하고 $t = 1$일 때 접선의 방정식을 구하시오.

Solution

주어진 곡선의 방정식은 $t(t + 2x) + t - x = e^t$ 또는 $t(2y - t) + 2t - y = e^t$이다. 각각을 x, y에 대해 정리하면 $x(t) = \dfrac{e^t - t^2 - t}{2t - 1}$, $y(t) = \dfrac{e^t + t^2 - 2t}{2t - 1}$를 얻는다. 이들을 미분하면 $x'(t) = \dfrac{(2t-3)e^t - 2t^2 + 2t + 1}{(2t-1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{(2t-3)e^t + 2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2}$가 된다. 여기에 주어진 $t = 1$을 대입하면 접선 위의 한 점 $(x(1), y(1)) = (e-2, e-1)$과 접선의 방향벡터 $(x'(1), y'(1)) = (-e+1, -e+2)$를 얻는다. 따라서 접선의 방정식(교재 p.208 참고)은 $x = (e-2) + (-e+1)s$, $y = (e-1) + (-e+2)s$ $(s \in \mathbb{R})$ 또는 $\dfrac{x - (e-2)}{-e+1} = \dfrac{y - (e-1)}{-e+2}$로 나타낼 수 있다.

채점기준

- $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $x(1)$, $y(1)$, $x'(1)$, $y'(1)$에 각 2점. 모든 값은 매개화를 통하여 구해야 하며, 한 값이 틀리면 그로부터 파생되는 값도 오답 처리.
- 접선의 방정식에 4점.

8. (25점) $\mathbb{R}^3$에서 원점을 지나지 않는 곡선 $X(t)$가 케플러 운동을 기술한다고 하자. 즉, $X(t)$는 다음의 미분방정식을 만족한다.

$$X''(t) = -\frac{X(t)}{|X(t)|^3}$$

(a) (5점) 곡선 $X(t)$의 원점에 대한 각운동량이 보존됨을 보이시오.

(b) (10점) 곡선 $X(t)$의 에너지

$$E(t) = \frac{1}{2}|X'(t)|^2 - \frac{1}{|X(t)|}$$

가 보존됨을 보이시오.

(c) (10점) 각 시각 t에서 원점과 $X(t)$를 연결하는 선분이 시간 Δt동안 지나간 영역의 넓이가 Δt의 상수배임을 보이시오. ($X(t)$가 xy-평면 위의 곡선이라고 가정해도 된다.)

Solution

(a) $\dfrac{d}{dt}(X(t) \times X'(t)) = X'(t) \times X'(t) + X(t) \times X''(t) = X(t) \times \left(-\dfrac{X(t)}{|X(t)|^3}\right) = 0$ 이므로 각운동량이 보존된다.

(b) $E'(t) = X'(t) \cdot X''(t) + \dfrac{1}{|X(t)|^2} \cdot \dfrac{X(t) \cdot X'(t)}{|X(t)|} = X'(t) \cdot X''(t) - X'(t) \cdot X''(t) = 0$ 이므로 에너지가 보존된다.

(c) Δt동안 원점과 $X(t)$를 연결하는 선분이 지나간 영역의 넓이는 벡터 $X(t)$와 $(X(t+\Delta t) - X(t)) \approx X'(t)\Delta t$ 가 이루는 삼각형의 넓이이므로 $\dfrac{1}{2}|X(t) \times X'(t)|\Delta t$ 이다. (a)에서 각운동량은 보존된다고 하였으니, 이는 Δt의 상수배이다.

채점기준

- (a)에서 외적에 관한 미분에 관한 성질을 이용하여 잘 보이면 5점
- (b)에서 합성함수의 미분을 이용하여 잘 보이면 10점
- (c)에서 Δt 동안의 영역의 넓이를 적당한 두 벡터가 이루는 삼각형의 넓이로 해석하면 5점, (a)의 결과로 증명을 마무리하면 5점

9. (15점) 다음 곡선을 생각하자.

$$X(t) = \left(\sqrt{2}\sin 2t, -\sqrt{2}\cos 2t, t\right), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

(a) (5점) 곡선 $X(t)$의 길이를 구하시오.

(b) (10점) 곡선 $X(t)$의 중심을 구하시오.

Solution

(a) $X'(t) = (2\sqrt{2}\cos 2t, -2\sqrt{2}\sin 2t, 1)$이므로, $|X'(t)| = 3$이다.
따라서 곡선의 길이는 $\int_0^{2\pi} |X'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} 3\, dt = 6\pi$이다.

(b) 곡선 $X(t)$의 각 좌표 x_i의 중심은 $\bar{x}_i = \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} x_i(t)|X'(t)|\, dt$이므로

$$\bar{x} = \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} x(t)|X'(t)|\, dt = \frac{3}{6\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin 2t\, dt = 0$$
$$\bar{y} = \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} y(t)|X'(t)|\, dt = \frac{3}{6\pi}\int_0^{2\pi} -\sqrt{2}\cos 2t\, dt = 0$$
$$\bar{z} = \frac{1}{6\pi}\int_0^{2\pi} z(t)|X'(t)|\, dt = \frac{3}{6\pi}\int_0^{2\pi} t\, dt = \pi$$이다.

따라서 곡선 $X(t)$의 중심은 $(0, 0, \pi)$이다.

채점기준

- 곡선의 속력을 잘 구하면 2점
- 곡선의 길이를 잘 구하면 3점
- 각 좌표의 중심을 제대로 구하면 3점, 모든 좌표를 잘 구했으면 10점
- 곡선의 길이가 틀렸어도 (b)에서 중심의 정의를 제대로 적었으면 2점

10. (20점) 좌표평면 위의 곡선 $X(t)$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$X(t) = (3\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le \alpha.$$

이때, 양수 α는 점 $P = X(0)$, $Q = X(\alpha)$에 대해 각 $\angle POQ$가 $\frac{\pi}{6}$가 되는 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 값이라고 한다. 이 곡선에 대하여 함수 $f(x, y) = xy$의 선적분을 구하시오.

Solution

$$\angle POQ = \frac{\pi}{6} \iff \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \pm\tan(\frac{\pi}{6}) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\iff \tan\alpha = \pm\sqrt{3}$$

이 중에서 α 가 $\frac{\pi}{2}$ 이하가 되기 위해서는 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned}\int_X f\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3\cos t\sin t\sqrt{1+8\sin^2 t}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{8}(1+8\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{7\sqrt{7}-1}{8}\end{aligned}$$

채점기준

- α 를 잘 구하면 5점
- 함수의 곡선에 대한 선적분의 정의를 잘 적었으면 5점
- 정답을 맞추면 10점