

강좌번호:

학번:

이름:

단답형 문제는 답만, 나머지 문제는 답과 그 풀이과정을 해당 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓸 것. (총점 200점)

문제 1. [단답형] (10점) \mathbb{R}^3 의 세 벡터

$$\mathbf{a} = (1, 2, 2), \quad \mathbf{b} = (-1, k, 6), \quad \mathbf{c} = (0, 1, k)$$

가 일차종속이 되게 하는 k 를 모두 구하시오.

문제 2. [단답형] (15점) \mathbb{R}^3 의 곡선 $X(t) = (\cosh t, \sinh t, e^t)$ ($-\infty < t < \infty$) 위의 점 $(1, 0, 1)$ 에서 접촉평면을 구하시오.

1	2	3 (c)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 3. (25점) \mathbb{R}^3 의 세 점 $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (a, b, c)$ 와 원점 $O = (0, 0, 0)$ 에 대하여 주어진 세 벡터 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ 는 다음 세 조건을 만족한다. (1) $|\mathbf{c}| = \sqrt{2}$, (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1$, (3) $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$. 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $\triangle ABC$ 는 정삼각형임을 보이고, 그 넓이를 구하시오.
- (b) (10점) 원점 O 에서 '세 점 A, B, C 를 지나는 평면'까지의 거리를 구하시오.
- (c) [단답형: 1면의 해당 답안영역에 답을 쓸것] (5점) $(\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 5\mathbf{c})$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 4. (30점) 차수가 2 이하인 다항함수들의 벡터공간을 V 라 하자. 변환 $L: V \rightarrow V$ 과 $T: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$L(p(x)) = p'(x) + 2p(x), \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2)$$

- (a) (5점) 변환 L 이 선형임을 보이시오.
- (b) (10점) 선형변환 $S = T \circ L \circ T^{-1}$ 의 행렬표현 A 를 구하시오.
- (c) (5점) A 의 행렬식을 이용하여 S 가 전단사함수임을 보이시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 4. (이어서)

(d) (10점) A 의 역행렬을 구하고, 이를 이용하여 $p'(x) + 2p(x) = x^2$ 인 2차 이하의 다항함수 $p(x)$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 5. (20점) \mathbb{R}^3 의 점 $P(t) = (t, t^2, 0)$ ($-\infty < t < \infty$)에서 구면 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 의 중심을 향하여 빛을 쏘았을 때 구면에 맺히는 상 중 $P(t)$ 에 가까운 점을 $X(t)$ 라고 하자. 곡선 $X(t)$ ($-\infty < t < \infty$) 위의 점 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \sqrt{3}-1)$ 에서 접선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 6. (20점) 극좌표로 표현된 곡선

$$X(t) = (r(t), \theta(t)), \quad r(t) = \cos t, \quad \theta(t) = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점) $t = 0$ 에서 속도벡터와 가속도벡터를 극좌표로 구하시오.
- (b) (10점) 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 7. (20점) 좌표평면 위의 곡선

$$y^2 - x^2 + y - 2x = e^{y-x}, \quad y - x > \frac{1}{2}$$

를 매개변수 $t = y - x$ 로 매개화하고 $t = 1$ 일 때 접선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 8. (25점) \mathbb{R}^3 에서 원점을 지나지 않는 곡선 $X(t)$ 가 케플러 운동을 기술한다고 하자. 즉, $X(t)$ 는 다음의 미분방정식을 만족한다.

$$X''(t) = -\frac{X(t)}{|X(t)|^3}$$

(a) (5점) 곡선 $X(t)$ 의 원점에 대한 각운동량이 보존됨을 보이시오.

(b) (10점) 곡선 $X(t)$ 의 에너지

$$E(t) = \frac{1}{2}|X'(t)|^2 - \frac{1}{|X(t)|}$$

가 보존됨을 보이시오.

(c) (10점) 각 시각 t 에서 원점과 $X(t)$ 를 연결하는 선분이 시간 Δt 동안 지나간 영역의 넓이가 Δt 의 상수배임을 보이시오. ($X(t)$ 가 xy -평면 위의 곡선이라고 가정해도 된다.)

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 9. (15점) 다음 곡선을 생각하자.

$$X(t) = (\sqrt{2} \sin 2t, -\sqrt{2} \cos 2t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- (a) (5점) 곡선 $X(t)$ 의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) 곡선 $X(t)$ 의 중심을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 10. (20점) 좌표평면 위의 곡선 $X(t)$ 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$X(t) = (3 \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \alpha.$$

이때, 양수 α 는 점 $P = X(0)$, $Q = X(\alpha)$ 에 대해 각 $\angle POQ$ 가 $\frac{\pi}{6}$ 가 되는 $\frac{\pi}{2}$ 보다 작은 값이라고 한다. 이 곡선에 대하여 함수 $f(x, y) = xy$ 의 선적분을 구하시오.

(풀이)