

강좌번호:

학번:

이름:

단답형 문제는 답만, 나머지 문제는 답과 그 풀이과정을 해당 답안영역에 가독성이 높게 정자로 쓸 것. (총점 200점)

문제 1. [단답형] (10점)  $\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터

$\mathbf{a} = (1, 2, 2), \quad \mathbf{b} = (-1, k, 6), \quad \mathbf{c} = (0, 1, k)$

가 일차종속이 되게 하는  $k$ 를 모두 구하시오.

문제 2. [단답형] (15점)  $\mathbb{R}^3$ 의 곡선  $X(t) = (\cosh t, \sinh t, e^t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) 위의 점  $(1, 0, 1)$ 에서 접촉평면을 구하시오.

1	2	3 (c)

강좌번호:

학번:

이름:

**문제 3.** (25점)  $\mathbb{R}^3$ 의 세 점  $A = (0, 1, 1)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (a, b, c)$ 와 원점  $O = (0, 0, 0)$ 에 대하여 주어진 세 벡터  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ 는 다음 세 조건을 만족한다. (1)  $|\mathbf{c}| = \sqrt{2}$ , (2)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1$ , (3)  $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ . 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점)  $\triangle ABC$ 는 정삼각형임을 보이고, 그 넓이를 구하시오.
- (b) (10점) 원점  $O$ 에서 ‘세 점  $A, B, C$ 를 지나는 평면’까지의 거리를 구하시오.
- (c) [단답형: 1면의 해당 답안영역에 답을 쓸것] (5점)  $(\mathbf{a} \times 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 5\mathbf{c})$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

**문제 4.** (30점) 차수가 2 이하인 다항함수들의 벡터공간을  $V$ 라 하자. 변환  $L: V \rightarrow V$ 과  $T: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$L(p(x)) = p'(x) + 2p(x), \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2)$$

- (a) (5점) 변환  $L$ 이 선형임을 보이시오.
- (b) (10점) 선형변환  $S = T \circ L \circ T^{-1}$ 의 행렬표현  $A$ 를 구하시오.
- (c) (5점)  $A$ 의 행렬식을 이용하여  $S$ 가 전단사함수임을 보이시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 4. (이어서)

(d) (10점)  $A$ 의 역행렬을 구하고, 이를 이용하여  $p'(x) + 2p(x) = x^2$ 인 2차 이하의 다항함수  $p(x)$ 를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

**문제 5.** (20점)  $\mathbb{R}^3$ 의 점  $P(t) = (t, t^2, 0)$  ( $-\infty < t < \infty$ )에서 구면  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 의 중심을 향하여 빛을 쏘았을 때 구면에 맺히는 상 중  $P(t)$ 에 가까운 점을  $X(t)$ 라고 하자. 곡선  $X(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) 위의 점  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \sqrt{3}-1)$ 에서 접선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 6. (20점) 극좌표로 표현된 곡선

$$X(t) = (r(t), \theta(t)), \quad r(t) = \cos t, \quad \theta(t) = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (a) (10점)  $t = 0$ 에서 속도벡터와 가속도벡터를 극좌표로 구하시오.  
 (b) (10점) 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 7. (20점) 좌표평면 위의 곡선

$$y^2 - x^2 + y - 2x = e^{y-x}, \quad y - x > \frac{1}{2}$$

를 매개변수  $t = y - x$  로 매개화하고  $t = 1$  일 때 접선의 방정식을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

**문제 8.** (25점)  $\mathbb{R}^3$ 에서 원점을 지나지 않는 곡선  $X(t)$ 가 케플러 운동을 기술한다고 하자. 즉,  $X(t)$ 는 다음의 미분방정식을 만족한다.

$$X''(t) = -\frac{X(t)}{|X(t)|^3}$$

(a) (5점) 곡선  $X(t)$ 의 원점에 대한 각운동량이 보존됨을 보이시오.

(b) (10점) 곡선  $X(t)$ 의 에너지

$$E(t) = \frac{1}{2}|X'(t)|^2 - \frac{1}{|X(t)|}$$

가 보존됨을 보이시오.

(c) (10점) 각 시각  $t$ 에서 원점과  $X(t)$ 를 연결하는 선분이 시간  $\Delta t$ 동안 지나간 영역의 넓이가  $\Delta t$ 의 상수배임을 보이시오. ( $X(t)$ 가  $xy$ -평면 위의 곡선이라고 가정해도 된다.)

(풀이)



강좌번호:

학번:

이름:

문제 9. (15점) 다음 곡선을 생각하자.

$$X(t) = \left( \sqrt{2} \sin 2t, -\sqrt{2} \cos 2t, t \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- (a) (5점) 곡선  $X(t)$ 의 길이를 구하시오.
- (b) (10점) 곡선  $X(t)$ 의 중심을 구하시오.

(풀이)

강좌번호:

학번:

이름:

문제 10. (20점) 좌표평면 위의 곡선  $X(t)$ 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$X(t) = (3 \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \alpha.$$

이때, 양수  $\alpha$ 는 점  $P = X(0)$ ,  $Q = X(\alpha)$ 에 대해 각  $\angle POQ$ 가  $\frac{\pi}{6}$ 가 되는  $\frac{\pi}{2}$  보다 작은 값이라고 한다. 이 곡선에 대하여 함수  $f(x, y) = xy$ 의 선적분을 구하시오.

(풀이)