미적분학 2 기말고사

(2022년 12월 10일 오후 1:00–3:00)

학번:	이름:

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

문제 1. [20점] 삼차원 좌표공간의 세 영역

$$R_1 = \left\{(x,\, y,\, z) \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 4\right\},$$
$$R_2 = \left\{(x,\, y,\, z) \,\middle|\, x^2+y^2+(z-1)^2 \ge 1\right\},$$
$$R_3 = \left\{(x,\, y,\, z) \,\middle|\, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

에 대하여 $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$의 부피를 구하시오.

문제 2. [15점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x^2} 4e^{(1-z)^2}\, dzdydx$$

문제 3. [15점] 삼차원 좌표공간의 영역 R을 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=x+y+5$ 로 둘러싸인 부분이라 할 때, 다음 적분을 구하시오.

$$\iiint_R \left(x^2+y^2\right)\, dxdydz$$

문제 4. [20점] 좌표평면에서 시작점이 $(\pi, 0)$이고 끝점이 $(0, 6\pi)$인 선분을 따라 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (\cos x \sin y, xy + \sin x \cos y)$의 선적분을 구하시오.

문제 5. [25점] 좌표평면 위의 데카르트 곡선

$$C : x^3+y^3 = 3xy, \quad (x, y \ge 0)$$

로 둘러싸인 영역을 D라 하자.

(a) (10점) D의 넓이를 구하시오.

(b) (15점) C에서 $y \ge \frac{1}{2}x$를 만족하는 부분을 X라고 하자. 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{(x-1, y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

가 곡선 X를 수직으로 통과하는 양(flux)의 절댓값을 구하시오.

〈 풀이 〉

문제 6. [20점] 삼차원 좌표공간의 영역 $x^2 + y^2 \le \frac{3}{4}$에서 정의된 함수 $z = 1 - x^2 - y^2$의 그래프로 주어진 곡면 S에 대해 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_S z \, \mathrm{dS}$$

문제 7. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 곡면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \ge 0)$과 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 으로 둘러싸인 영역의 경계를 S라 하자. 벡터장

$$\mathbf{F}(x,\, y,\, z) = \left(x^3 + \sin yz,\, y^3 + \sin zx,\, z^3 + e^{xy}\right)$$

에 대하여 면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

문제 8. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 포물면 $z = 2x^2 + 2y^2 - 1$과 $x + y + z \le 0$의 공통부분을 S라 하자. 이때, 입체각 벡터장 $\mathbf{A}(x,\, y,\, z) = \dfrac{(x,\, y,\, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$에 대하여 다음 적분을 구하시오. 단, 곡면 S의 향은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \le 0$을 만족하도록 정하고 경계곡선 ∂S의 향은 S에 대하여 스토크스 정리가 성립하도록 정한다.

(a) (10점) $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

(b) (10점) $\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$

문제 9. [25점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$과 평면 $z = 2 - 2x - y$가 만나는 교선을 C라 할 때, 다음 선적분을 구하시오. (단, C의 향은 C를 xy-평면에 정사영 했을 때 반시계 방향이 되도록 잡는다.)

$$\int_C (yze^{xyz} + \sin x + xyz)\, dx + (xze^{xyz} + \cos y + xyz)\, dy + (xye^{xyz} + \sin^2 z + xyz)\, dz$$

문제 10. [20점] 두 일급함수 g와 h가 임의의 $c \le y \le d$에 대하여 $g(y) \le h(y)$가 성립한다고 하자. 좌표평면의 영역

$$D = \{(x,\, y) \mid c \le y \le d,\ g(y) \le x \le h(y)\}$$

에서 정의된 일급벡터장

$$\mathbf{F}(x,\, y) = P(x,\, y)\mathbf{i} + Q(x,\, y)\mathbf{j}$$

에 대하여 라이프니츠 정리를 이용해서 그린 정리가 성립함을 보이시오. (단, 발산 정리와 스토크스 정리를 사용하지마시오.)