

모든 문제의 답에 풀이과정을 명시하시오. (총점 200점)

〈 연습용 여백 〉

문제 1. [20점] 삼차원 좌표공간의 세 영역

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1\},$$

$$R_3 = \{(x, y, z) \mid z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

에 대하여 $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$ 의 부피를 구하시오.

문제 2. [15점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x^2} 4e^{(1-z)^2} dz dy dx$$

문제 3. [15점] 삼차원 좌표공간의 영역 R 을 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = x + y + 5$ 로 둘러싸인 부분이라 할 때, 다음 적분을 구하시오.

$$\iiint_R (x^2 + y^2) dx dy dz$$

문제 4. [20점] 좌표평면에서 시작점이 $(\pi, 0)$ 이고 끝점이 $(0, 6\pi)$ 인 선분을 따라 벡터장 $\mathbf{F}(x, y) = (\cos x \sin y, xy + \sin x \cos y)$ 의 선적분을 구하시오.

문제 5. [25점] 좌표평면 위의 데카르트 곡선

$$C : x^3 + y^3 = 3xy, \quad (x, y \geq 0)$$

로 둘러싸인 영역을 D 라 하자.

(a) (10점) D 의 넓이를 구하시오.

(b) (15점) C 에서 $y \geq \frac{1}{2}x$ 를 만족하는 부분을 X 라고 하자. 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(x-1, y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

가 곡선 X 를 수직으로 통과하는 양(flux)의 절댓값을 구하시오.

문제 6. [20점] 삼차원 좌표공간의 영역 $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ 에서 정의된 함수 $z = 1 - x^2 - y^2$ 의 그래프로 주어진 곡면 S 에 대해 다음 적분을 구하시오.

$$\iint_S z \, dS$$

문제 7. [15점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 곡면

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad (z \geq 3)$$

의 향을 정하는 단위법벡터 \mathbf{n} 은 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \geq 0$ 이 되도록 정의되어있다. 입체각 벡터장 $\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ 가 곡면 S 를 빠져나가는 양(flux)를 구하시오.

문제 8. [20점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 곡면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$)과 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 으로 둘러싸인 영역의 경계를 S 라 하자. 벡터장

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + \sin yz, y^3 + \sin zx, z^3 + e^{xy})$$

에 대하여 면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ 의 값을 구하시오.

문제 9. [25점] 다음 적분을 구하시오.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx dz$$

문제 10. [25점] 삼차원 좌표공간에서 정의된 원기둥면 $x^2 + y^2 = 1$ 과 평면 $z = 2 - 2x - y$ 가 만나는 교선을 C 라 할 때, 다음 선적분을 구하시오. (단, C 의 향은 C 를 xy -평면에 정사영했을 때 반시계 방향이 되도록 잡는다.)

$$\int_C (yze^{xyz} + \sin x + xyz) \, dx + (xze^{xyz} + \cos y + xyz) \, dy + (xye^{xyz} + \sin^2 z + xyz) \, dz$$